UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215386 2

CHHEIM

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

I

A: AUFGABEN

QA
555
H64
1904
Heft
1a

UNIVERSITY
OF
TORONTO
LIBRARY

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, ferner **Natur und Schule**, Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen, die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 25000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], sowie der Nachtrag 1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

Mat G
Hoch 4a

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

VON

PROFESSOR DR. **ADOLF HOCHHEIM,**
WEILAND KÖNIGL. PROVINZIALSCHULRAT ZU BERLIN.

HEFT I.a

DIE GERADE LINIE, DER PUNKT, DER KREIS.

A. AUFGABEN.

DRITTE, VERMEHRTE AUFLAGE

BEARBEITET VON

DR. **FRANZ HOCHHEIM.**

67 u 30
9/11/05.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

QA
555
H64
1904
Left 1a

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort zur ersten Auflage.

Bei Herausgabe der vorliegenden Sammlung von Aufgaben war die Erwägung maßgebend, daß ein Studium der analytischen Geometrie nur dann wahrhaft fruchtbringend sein kann, wenn mit der theoretischen Behandlung zugleich die praktische Übung verbunden wird. Um für diese Übung ein ausgiebiges Material zu schaffen, galt es nicht nur die längst bekannten Theorien zu berücksichtigen, sondern auch die zahlreichen großen Resultate, mit denen während der jüngsten Jahrzehnte die Wissenschaft bereichert worden ist, in leicht faßlichen Problemen zur Anwendung zu bringen. Für die Lösungen schien es angemessen, auch die Methoden der modernen Algebra zu benutzen.

Das Werk soll den Studierenden der Mathematik auf der Universität und der technischen Hochschule dienen, doch werden die ersten Hefte auch bei dem Unterrichte auf der obersten Stufe des Realgymnasiums und der Ober-Realschule Verwendung finden können.

Möchte es dem Buche gelingen, die Jünger der Wissenschaft bei ihrem Studium zu fördern und sie zur Selbsttätigkeit anzuregen.

Magdeburg, im Januar 1882.

Ad. Hochheim.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der vorliegenden Neubearbeitung des ersten Heftes ist die Anordnung des Stoffes unverändert geblieben; dagegen ist auf einen mehrfach geäußerten Wunsch, damit dem Anfänger die ersten Schritte möglichst erleichtert werden, eine Erweiterung des Materials durch Einfügung von Zahlenbeispielen und von leichteren Aufgaben über den Punkt, ferner durch Vermehrung der Probleme, in denen die Bestimmung geometrischer Örter gefordert wird, eingetreten.

Möchte die Neubearbeitung eine gleich wohlwollende Aufnahme finden, wie sie der ersten Auflage zuteil geworden ist.

Brandenburg a. d. H., im April 1894.

Ad. Hochheim.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die vorliegende Neubearbeitung weist gegenüber der zweiten Auflage eine Vermehrung um 108 Aufgaben, sowie die Beifügung neuer Zahlenbeispiele an verschiedenen Stellen auf. Besonders die Abschnitte von den homogenen Punkt- und Linienkoordinaten sind erweitert und in den Lösungen teilweise umgearbeitet worden, um eine strenge Scheidung zwischen absoluten und relativen trimetrischen Koordinaten durchzuführen; ein neuer Abschnitt behandelt den Punkt als Enveloppe. Den Abschnitten über Linienkoordinaten wie über homogene Koordinaten sind einleitende Anmerkungen vorausgeschickt, da das Verständnis dieser Koordinaten dem Anfänger oft Schwierigkeiten bietet, und viele der gebräuchlichen Lehrbücher der analytischen Geometrie die betreffenden Kapitel gar nicht oder nur nebensächlich berücksichtigen. Überhaupt war es des Herausgebers Bestreben, dem Buch seinen bisherigen Charakter zu erhalten, daß es im Unterricht wie beim Selbststudium vom Gebrauche eines bestimmten Lehrbuches unabhängig ist, daß ferner die Aufgaben im allgemeinen sich für den Gebrauch im Unterricht der Prima eignen, auch die schwierigeren Aufgaben für reifere Schüler verständlich sind. Zwecks leichterer Benutzung der Sammlung beim Unterricht sind die Nummern der Aufgaben aus der zweiten Auflage in Klammern beigefügt worden.

Möchte der neuen Auflage eine ebenso wohlwollende Aufnahme beschieden sein wie den bisherigen.

Weißenfels a. S., im August 1903.

Franz Hochheim.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1. Bestimmung der Lage eines Punktes durch die Koordinaten desselben Nr. 1—11 1
2. Die Entfernung zweier Punkte Nr. 12—21 2
3. Teilung einer Strecke nach einem bestimmten Verhältnis Nr. 22—30 3
4. Transformation der Koordinaten Nr. 31—42 4

Die gerade Linie.

5. Die Gleichung der geraden Linie Nr. 43—48 6
6. Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus gegebenen Stücken Nr. 49—67 7
7. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden Nr. 68—75 . . 10
8. Die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden Nr. 76—95 11
9. Der Inhalt eines Polygons Nr. 96—114 14
10. Gerade Linien, welche durch einen Punkt gehen Nr. 115—125 . 17
11. Bestimmung des Winkels, welchen zwei gerade Linien einschließen Nr. 126—139 18
12. Parallele Gerade Nr. 140—147. 20
13. Gerade Linien, welche sich rechtwinklig durchschneiden Nr. 148—166 21
14. Die Halbierungslinie eines Winkels Nr. 167—178 24
15. Geometrische Örter Nr. 179—217 25
16. Vermischte Aufgaben Nr. 218—245 29
17. Gleichungen höheren Grades, welchen Systeme von geraden Linien entsprechen Nr. 246—275 33
18. Das Strahlenbüschel Nr. 276—294 36
19. Das Doppelverhältnis von vier Strahlen Nr. 295—305 39
20. Harmonische Strahlenbüschel Nr. 306—325 41
21. Involutorische Strahlenbüschel Nr. 326—344 43
22. Homogene Punktkoordinaten Nr. 345—404 47

Der Punkt.

23. Die Gleichung des Punktes (Linienkoordinaten) Nr. 405—439 . 53
24. Das Doppelverhältnis von vier Punkten Nr. 440—447 57
25. Harmonische Punkte Nr. 448—456 59
26. Involutorische Punktreihen Nr. 457—470 60
27. Homogene Linienkoordinaten Nr. 471—506 62
28. Enveloppen Nr. 507—521 66

Der Kreis.

Seite

29. Die Gleichung des Kreises Nr. 522—540 68
30. Der Kreis und die Gerade Nr. 541—554 70
31. Tangente und Normale des Kreises, Länge der Tangente Nr. 555—577 72
32. Pol und Polare Nr. 578—602 75
33. Bestimmung der Gleichung eines Kreises aus gegebenen Stücken Nr. 603—637 78
34. Geometrische Örter und Enveloppen Nr. 638—682 82
35. Kreise, welche sich schneiden oder berühren Nr. 683—699 . . 86
36. Radikalachse und Radikalzentrum Nr. 700—719 89
37. Das Kreisbüschel Nr. 720—742 91
38. Gemeinschaftliche Tangenten, Ähnlichkeitspunkte, Ähnlichkeitsachsen Nr. 743—764 94
39. Das Taktionsproblem Nr. 765—772 97

Bestimmung der Lage eines Punktes durch die Koordinaten desselben.

1. Bestimme die Lage der Punkte, deren Koordinaten sind: a) $x = 3,\ y = 5$; b) $x = -6,\ y = -1$; c) $x = 7,\ y = -2$; d) $x = -1,\ y = 4$; e) $x = 0,\ y = -3$; f) $x = 6,\ y = 0$; g) $x = 0,\ y = 0$.

2. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks sind:

$$x_1 = 2,\ y_1 = 4;\ x_2 = -2,\ y_2 = 7;\ x_3 = -6,\ y_3 = -8.$$

Das Dreieck ist zu konstruieren.

3. Konstruiere das Viereck, dessen Eckpunkte die Koordinaten $x_1 = 7,\ y_1 = 2$; $x_2 = 0,\ y_2 = -9$; $x_3 = -3,\ y_3 = -1$; $x_4 = -6,\ y_4 = 4$ besitzen.

4. Gegeben seien die Abszissen $x_1 = 4$ und $x_2 = -7$. Es sollen die zugehörigen Ordinaten gesucht und konstruiert werden

a) mit Hilfe der Gleichung $y = 2x - 9$;

b) . . . . . $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$;

c) . . . . . $y = 3x^2 - 5x - 7$;

d) . . . . . $y^2 + x^2 = 20$;

e) . . . . . $y^2 = 3x^3 - 5x^2 + x + 5$.

5. Wo liegen die Punkte, deren Koordinaten folgenden Gleichungen genügen:

a) $3x - 7y = 55,\ 5x + 2y = -4$;

b) $2x - 3y = -3,\ 11x - 16y = -19$;

c) $x^2 + (5 - y)\left(5 - \frac{5}{2}x - y\right) = 0,\ x + y = 7$;

d) $9x^2 + 10xy + y^2 = 273,\ 9x^2 - 10xy + y^2 = 33$;

e) $x^2 + y^2 + x + y = 36,\ 2x^2 + 2y^2 + 3xy - 88 = 0$?

6. Wieviel Punkte ergeben sich, wenn die eine Gleichung vom p^{ten}, die andre vom q^{ten} Grade ist?

7. Welches sind die Koordinaten derjenigen Punkte, welche auf der Abszissenachse oder der Ordinatenachse liegen und vom Koordinatenanfangspunkte den Abstand a haben? Welches sind die Koordinaten des Koordinatenanfangspunktes?

8. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seite s. Durch den Schnittpunkt der Diagonalen sei ein rechtwinkliges Achsensystem gelegt. Welches sind die Koordinaten der Ecken,

a) wenn die Seiten den Achsen parallel laufen?

b) wenn die Diagonalen auf den Achsen liegen?

9. In welcher Beziehung stehen die Koordinaten zweier Punkte, deren Verbindungslinie im Koordinatenanfangspunkte halbiert wird?

10. Gegeben sei ein reguläres Sechseck mit der Seite s. Welches sind die Koordinaten der Ecken, wenn die X-Achse auf zwei gegenüberliegenden Seiten lotrecht steht, der Koordinatenanfangspunkt mit dem Mittelpunkte und die Y-Achse mit einer Diagonale zusammenfällt?

11. Ein reguläres Achteck besitze die Seite s. Der Mittelpunkt desselben sei Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Welches sind die Koordinaten der Ecken,

a) wenn zwei Seiten desselben der Y-Achse parallel laufen?

b) wenn die Abszissenachse durch zwei gegenüberliegende Ecken geht?

Die Entfernung zweier Punkte.

12. Gegeben seien die rechtwinkligen Koordinaten der beiden Punkte A und B: (x_1, y_1), (x_2, y_2). Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden?

Beispiele.

a) $x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 8, \quad y_2 = 6.$

b) $x_1 = 5, \quad y_1 = 24, \quad x_2 = 17, \quad y_2 = 29.$

c) $x_1 = 27, \quad y_1 = -11, \quad x_2 = -3, \quad y_2 = -7.$

d) $x_1 = -3, \quad y_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad y_2 = -4.$

13. Gegeben sind die schiefwinkligen Koordinaten $(x_1, y_1; x_2, y_2)$ zweier Punkte und der Koordinatenwinkel α. Die Entfernung der Punkte ist zu bestimmen.

Beispiele.

a) $x_1 = 9, \quad y_1 = -4; \quad x_2 = 11, \quad y_2 = 7; \quad \alpha = 60^0.$

b) $x_1 = -5, \; y_1 = 13; \quad x_2 = 8, \quad y_2 = -7; \quad \alpha = 60^0.$

c) $x_1 = -3, \; y_2 = -6; \quad x_2 = -5, \; y_2 = 9; \quad \alpha = 120^0.$

d) $x_1 = 2, \quad y_2 = -14; \; x_2 = -10, \; y_2 = -19; \; \alpha = 120^0.$

14. Die Polarkoordinaten des Punktes A seien r_1 und φ_1, die des Punktes B r_2 und φ_2. Wie groß ist die Strecke AB?

Beispiele.

a) $r_1 = 17,\ r_2 = 19,\ \varphi_1 = 30^0\,11',\ \varphi_2 = 172^0\,30'.$

b) $r_1 = 13,\ r_2 = 25,\ \varphi_1 = 83^0\,17',\ \varphi_2 = 11^0\,49'.$

c) $r_1 = 12,\ r_2 = 15,\ \varphi_1 = 74^0\,51',\ \varphi_2 = 212^0\,16'.$

d) $r_1 = 18,\ r_2 = 10,\ \varphi_1 = 13^0\,11',\ \varphi_2 = 316^0\,23'.$

15. Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte der Y-Achse, die von dem Punkte (x_1, y_1) den Abstand d haben?

16. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn der Punkt (x_1, y_1) von dem Punkte $(7, -2)$ die Entfernung 11 haben soll?

17. Welcher Bedingung müssen die Koordinaten eines Punktes (x, y) Genüge leisten, wenn er von den Punkten $(2, 5)$, $(-11, 1)$ gleiche Entfernung haben soll?

18. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Wie lang sind die Seiten desselben?

Beispiele.

a) $x_1 = 2,\ y_1 = -13,\ x_2 = -9,\ y_2 = 5,\ x_3 = 17,\ y_3 = 23.$

b) $x_1 = 5,\ y_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_2 = 29,\ x_3 = 18,\ y_3 = 4.$

19. Die Koordinaten der Ecken eines Vierecks seien $(3, 4)$, $(7, -1)$, $(-6, -5)$, $(-16, 11)$. Wie lang sind die Seiten? Wie lang die Diagonalen?

20. Die Länge einer Strecke sei $= \sqrt{314}$. Die Koordinaten des einen Endpunktes seien $x_1 = 5$, $y_1 = -3$, die Abszisse des zweiten $x_2 = 22$. Wie groß ist die Ordinate des letzteren?

21. Es sollen die Koordinaten desjenigen Punktes gefunden werden, welcher gleichweit von den Punkten

$$x_1 = 2,\ y_1 = 7,\ x_2 = 3,\ y_2 = -1,\ x_3 = -4,\ y_3 = -3$$

entfernt ist.

Teilung einer Strecke nach einem bestimmten Verhältnis.

22. Gegeben seien die Koordinaten der Endpunkte einer Strecke (x_1, y_1), (x_2, y_2). Welches sind die Koordinaten desjenigen Punktes, der diese Strecke im Verhältnis m zu n teilt?

Beispiele.

a) $x_1 = 7,\ y_1 = 11,\ x_2 = 13,\ y_2 = 4,\ m = 1,\ n = 1.$

b) $x_1 = -2,\ y_1 = 3,\ x_2 = 12,\ y_2 = -6,\ m = 1,\ n = 2.$

c) $x_1 = 3,\ y_1 = 13,\ x_2 = -7,\ y_2 = -1,\ m = 4,\ n = 7.$

23. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien

$$x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = -9,\ x_3 = -2,\ y_3 = -4.$$

Welches sind die Koordinaten der Halbierungspunkte der Seiten? Welches sind die Koordinaten des Schwerpunktes? Wie lang sind die Schwerpunktstransversalen?

24. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien (5, — 7), (1, 11), (— 4, 13). Welches sind die Koordinaten des Schwerpunktes? Wie weit ist derselbe vom zweiten Eckpunkte und wie weit vom Koordinatenanfangspunkte entfernt?

25. Eine Strecke sei in drei gleiche Teile geteilt. Der eine Endpunkt besitze die Koordinaten (3, 8), der zunächst liegende Teilpunkt (4, 13). Welches sind die Koordinaten des andern Endpunktes?

26. Die Strecke AB soll über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre Hälfte verlängert werden. Welches sind die Koordinaten der Endpunkte der Verlängerungen? Die Koordinaten von A seien (5, 6), die von B (7, 2).

27. Die Koordinaten von drei Eckpunkten eines Parallelogramms sind bekannt: (1, 2), (— 5, — 3), (7, — 6). Welches sind die Koordinaten des vierten Eckpunktes?

28. Die Koordinaten von zwei Eckpunkten eines Parallelogramms sind $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$, $y_2 = 7$, die des Schnittpunktes der Diagonalen $x' = 5$, $y' = 6$. Welches sind die Koordinaten des dritten und vierten Eckpunktes?

29. Die Strecke AB soll über B hinaus so weit verlängert werden, daß sie sich zu ihrer Verlängerung wie 4 zu 7 verhält. Die Koordinaten von A seien (5, 4), die von B (6, — 9).

30. Die eine Seite eines Dreiecks sei im Verhältnis m zu n geteilt, die Verbindungslinie dieses Teilpunktes mit der gegenüberliegenden Ecke im Verhältnis p zu q. Welches sind die Koordinaten des letzteren Teilpunktes?

Transformation der Koordinaten.

31. Gegeben sei die Gleichung $y = 5x - 6$. Welche Gestalt nimmt dieselbe an, wenn ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt wird, dessen Achsen den ursprünglichen parallel sind und sich im Punkte (5, 4) schneiden?

32. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Gleichung $x^2 + 14x + y^2 - 10y + 49 = 0$. Welche Form nimmt dieselbe an, wenn ein neues System zugrunde gelegt wird, dessen Achsen den ursprünglichen parallel sind und sich im Punkte (— 7, 5) durchschneiden?

33. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Relation $y = f(x)$. Welche Umwandlung erfährt dieselbe, wenn man ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde legt, welches denselben Anfangspunkt besitzt, dessen Achsen aber gegen die ursprünglichen unter dem Winkel α geneigt sind?

Beispiele.

a) $(y^2 + x^2)\ (x \operatorname{tg} \alpha + y) = 2ay\ (x - y \operatorname{tg} \alpha)$, der Drehungswinkel sei α.

b) $(x^2 - y^2)\ (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}) + xy\,(\sqrt{3} - \frac{1}{2}) + x\sqrt{3} + y = 0$, Drehungswinkel $= 30^0$.

34. Gegeben sei die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$; dieselbe soll auf ein neues Koordinatensystem transformiert werden, dessen Achsen die Halbierungslinien der rechten Winkel des ursprünglichen Systems sind.

35. Der Gleichung $2y^2 + 2xy + x^2 + 4R^2 = 0$ genügen die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes. Um welchen Winkel muß das Koordinatensystem gedreht werden, wenn die aus der Transformation hervorgehende Gleichung das Produkt der beiden neuen Koordinaten nicht enthalten soll?

36. Um welchen Winkel muß ein rechtwinkliges Koordinatensystem gedreht werden, damit die X-Achse in ihrer neuen Lage durch den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ hindurchgeht?

37. Der Koordinatenwinkel eines schiefwinkligen Systems betrage 45^0. Es mögen die Halbierungslinien dieses Winkels und seines Nebenwinkels zu Achsen eines neuen Systems genommen werden. Wie lauten die Transformationsformeln?

Beispiel. $x^2\,(4 - 3\sqrt{2}) + y^2\,(4 + 3\sqrt{2}) + 4xy\sqrt{2} = 0$.

38. Der Koordinatenwinkel eines Achsensystems betrage 60^0. Die Y-Achse möge um den Koordinatenanfangspunkt so gedreht werden, daß sie lotrecht zur X-Achse steht. Welches sind die Transformationsgleichungen?

Beispiel. $y^2 + 7xy + \frac{5}{2}y + 5x + 7x^2 = 0$.

39. Gegeben sei ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenwinkel α. Durch den Koordinatenanfangspunkt seien zwei neue Achsen gelegt mit dem Koordinatenwinkel β. Die neue X-Achse schließe mit der ursprünglichen den Winkel γ ein. Welches sind die Transformationsgleichungen?

40. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem werde um den Winkel α gedreht und außerdem so fortgeschoben, daß der Ko-

ordinatenanfangspunkt mit dem Punkte (a, b) zusammenfällt. Welche Gestalt nimmt die Gleichung $y = f(x)$ an, der die Koordinaten (x, y) eines gegebenen Punktes genügen?

Beispiel.

$$\tfrac{1}{8}(x^3\sqrt{3}+3y^3)-\tfrac{5}{8}x^2y+\tfrac{1}{8}\sqrt{3}xy^2+x^2\left(\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)-y^2\left(\tfrac{9}{8}+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\right)$$
$$+xy\left(\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\right)+x\left(\tfrac{13}{8}\sqrt{3}-\tfrac{5}{2}\right)-y\left(\tfrac{11}{8}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\tfrac{5}{4}\sqrt{3}-\tfrac{1}{8}=0;$$
$$a=2,\quad b=1,\quad \alpha=30^0.$$

41. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes genügen der Gleichung $y = \varphi(x)$. Welche Form nimmt diese Relation an bei Einführung von Polarkoordinaten, wenn der Pol die rechtwinkligen Koordinaten (a, b) besitzt und die feste Achse PS zur X-Achse unter dem Winkel α geneigt ist?

Beispiele.

1) $y^2-6y+9-5x=0,\quad a=\frac{5}{4},\quad b=3,\quad \alpha=0^0.$

2) $x^2-4x-y^2-6y-54=0,\quad a=2,\quad b=-3,\quad \alpha=0^0.$

3) $(x^2+y^2)^2=k^2(x^2-y^2),\quad a=0,\quad b=0,\quad \alpha=0^0.$

4) $(x^2+y^2)^2-6r^2(x^2+y^2)+8r^3x-3r^4=0,\quad a=-r,\quad b=0,$
$\alpha=30^0.$

42. Die Polarkoordinaten eines Punktes sind durch rechtwinklige zu ersetzen unter der Bedingung, daß die Abszissenachse des rechtwinkligen Systems mit der festen Achse und der Koordinatenanfangspunkt mit dem Pol zusammenfällt.

Beispiele. 1) $\varrho=\frac{k\vartheta}{2\pi}$. 2) $\varrho=k\sin 2\vartheta$.

3) $\varrho^2=k^2\cos 2\vartheta$. 4) $\varrho\sin\vartheta=a\vartheta$.

5) $\varrho=\frac{5k\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta+\cos^3\vartheta}$.

Die gerade Linie.

(Rechtwinklige Koordinaten.)

Die Gleichung der geraden Linie.

43. Welche Bedeutung haben die konstanten Größen in folgenden Gleichungen:

$\alpha)\ y=Ax+b,$ $\beta)\ \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$

$\gamma)\ x\cos\varphi+y\sin\varphi=p,$ $\delta)\ y-b=\operatorname{tg}\varphi\,(x-a)$?

44. Die Lage einer geraden Linie ist aus ihrer Gleichung zu bestimmen.

Beispiele.

1) $x = a$. 2) $x = 0$. 3) $x = -b$.

4) $y = 2$. 5) $y = -7$. 6) $y = x$.

7) $y = -x$. 8) $y = \frac{5}{4}x$. 9) $y = -\frac{7}{3}x$.

10) $y = x + a$. 11) $y = \frac{3}{4}x + 7$. 12) $y = \frac{x}{3} - 9$.

13) $y = -x + 3$. 14) $y = -\frac{x}{4} - 11$. 15) $\frac{x}{6} - \frac{y}{7} = 1$.

16) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$. 17) $\frac{x}{11} + \frac{y}{3} = -1$. 18) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5$.

19) $y - 5 = \frac{2}{3}(x - 3)$. 20) $y + 6 = -\frac{4}{7}(x - 12)$.

21) $3x + 4y - 5 = 0$. 22) $9x - 4y - 7 = 0$.

45. Aus der Gleichung einer Geraden $Lx + My + N = 0$ ist der Neigungswinkel derselben zur X-Achse zu bestimmen.

Beispiele. a) $5x - 3y + 7 = 0$. b) $7x + 11y - 3 = 0$.

46. Welche Abschnitte werden von der Geraden $Lx + My + N = 0$ auf den beiden Koordinatenachsen gebildet?

Beispiele. a) $2x - y - 14 = 0$. b) $15x + 75y + 120 = 0$.

47. Aus der Gleichung einer Geraden $Lx + My + N = 0$ ist die Normalgleichung derselben zu entwickeln.

Beispiele.

a) $3x + 4y + 2 = 0$. b) $12x + 5y - 26 = 0$. c) $y = 4x + 5$.

d) $y = -3x - 10$. e) $y = \frac{1}{7}x - 17$. f) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

g) $-\frac{3x}{8} + \frac{y}{2} = 1$. h) $5x = 4$. i) $3y = 8$.

k) $11x + 7 = 0$. l) $9y + 2 = 0$.

48. Welche gegenseitige Lage haben die beiden Geraden, die den Gleichungen

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0, \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi + p = 0$$

entsprechen?

Bestimmung der Gleichung einer geraden Linie aus gegebenen Stücken.

49. Durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) werde eine gerade Linie gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele. a) $x_1 = 4$, $y_1 = 5$, $x_2 = 7$, $y_2 = 11$.
b) $x_1 = -3{,}5$, $y_1 = 16$, $x_2 = 5{,}2$, $y_2 = -7$.
c) $x_1 = 0$, $y_1 = 2{,}1$, $x_2 = -1{,}4$, $y_2 = 0$.
d) $x_1 = -2$, $y_1 = -5$, $x_2 = -3$, $y_2 = -12$.

Welchen Abstand hat jede dieser Geraden vom Koordinatenanfangspunkte?

50. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die auf dem positiven Teile der X-Achse eine Strecke von der Länge 7, auf dem negativen Teile der Y-Achse eine Strecke von der Länge 2 abschneidet?

51. Gegeben seien die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks. Welches sind die Gleichungen der Seiten?

a) $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $x_2 = -3$, $y_2 = 5$, $x_3 = 7$, $y_3 = 11$.
b) $x_1 = 8{,}5$, $y_1 = 2{,}3$, $x_2 = 13$, $y_2 = -4{,}2$, $x_3 = -1{,}2$, $y_3 = 2$.

52. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien $x_1 = 5$, $y_1 = -7$, $x_2 = 1$, $y_2 = 11$, $x_3 = -4$, $y_3 = 13$. Welches sind die Gleichungen der Schwerpunktstransversalen?

53. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Vierecks seien $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 5$, $x_3 = 7$, $y_3 = 0$, $x_4 = 4$, $y_4 = -9$. Welches sind die Gleichungen der Seiten und der Diagonalen?

54. Die Strecke zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sei im Verhältnis m zu n geteilt. Welches ist die Gleichung der Geraden, welche den Punkt (x_3, y_3) mit dem Teilpunkte verbindet?

Beispiel. $x_1 = 6$, $y_1 = 2$, $x_2 = 7$, $y_2 = -3$, $x_3 = -5$, $y_3 = -5$, $m = 2$, $n = 5$.

55. Gegeben seien die Koordinaten der Eckpunkte eines Vierecks. Jede Seite desselben sei im Verhältnis m zu n geteilt. Welches sind die Gleichungen der Verbindungslinien der Teilpunkte?

Beispiel.

$x_1 = 0$, $y_1 = 7$, $x_2 = 5$, $y_2 = 11$, $x_3 = 4$, $y_3 = -3$, $x_4 = -1$, $y_4 = -5$, $m = 1$, $n = 2$.

56. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) in einer Geraden liegen sollen?

57. Es ist zu untersuchen, ob drei Punkte, deren Koordinaten gegeben sind, auf einer Geraden liegen, und die Gleichung derselben zu bestimmen.

Beispiele.

a) $x_1 = 2, \quad y_1 = 3, \quad x_2 = -4, \quad y_2 = -27, \quad x_3 = 7, \quad y_3 = 28.$

b) $x_1 = -1, \quad y_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 14, \quad x_3 = 0, \quad y_3 = 5.$

58. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und mit der X-Achse den Winkel φ einschließt?

Beispiele. a) $x_1 = 2, \quad y_1 = 7, \quad \varphi = 60^0.$

b) $x_1 = -3, \quad y_1 = 11, \quad \varphi = 45^0.$

c) $x_1 = 13, \quad y_1 = -4, \quad \varphi = 150^0.$

d) $x_1 = -5, \quad y_1 = -7, \quad \varphi = 225^0.$

e) $x_1 = 1, \quad y_1 = -5, \quad \varphi = 330^0.$

59. Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, die mit der Abszissenachse den Winkel $\alpha = 30^0$ einschließt und auf dem positiven oder negativen Teile derselben eine Strecke $a = 7{,}5$ abschneidet.

60. Die Gleichung einer Geraden ist anzugeben, welche mit der X-Achse den Winkel $\alpha = 67^0$ einschließt und auf dem positiven oder negativen Teile der Y-Achse eine Strecke $a = 0{,}34$ abschneidet.

61. Durch den Punkt $x_1 = 5, \; y_1 = 4$ ist eine Gerade so zu legen, daß das von ihr und den Abschnitten auf den positiven Achsenteilen gebildete rechtwinklige Dreieck den Inhalt 80 □ hat. Welches ist die Gleichung der Geraden?

62. Durch den Punkt $x_1 = -12, \; y_1 = 12$ ist eine Gerade zu legen, welche die negativen Teile der Koordinatenachsen schneidet und zwar so, daß das von ihr und den Abschnitten begrenzte Dreieck den Inhalt 6 □ hat.

63. Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu legen, so daß der Abschnitt auf dem positiven oder negativen Teile der Abszissenachse sich zu y_1 wie m zu n verhält.

Beispiel. $x_1 = 7, \; y_1 = 2, \; m = 5, \; n = 3.$

64. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und vom Koordinatenanfangspunkte den Abstand p besitzt?

Beispiele. a) $x_1 = 11, \quad y_1 = 3, \quad p = 7.$

b) $x_1 = -4, \quad y_1 = 3, \quad p = 5.$

65. Welches ist die Gleichung einer Geraden, die mit der X-Achse einen Winkel von 120^0 einschließt und vom Koordinatenanfangspunkte den Abstand 3 hat?

66. Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, welche von dem Koordinatenanfangspunkte den Abstand 4 hat und auf den positiven Teilen der Koordinatenachsen Stücke abschneidet, die sich wie 3 zu 2 verhalten.

67. Durch den Punkt (x_1, y_1) soll eine Gerade gelegt werden, so daß der Abschnitt zwischen den Achsen durch den gegebenen Punkt im Verhältnis m zu n geteilt wird.

Beispiele. a) $x_1 = 5, \quad y_1 = 7, \quad m = 1, \quad n = 1.$

b) $x_1 = -4, \quad y_1 = 3, \quad m = 5, \quad n = 3.$

Der Abstand eines Punktes von einer Geraden.

68. Welches ist die Länge des Lotes, welches sich von einem Punkte (x_1, y_1) auf eine gegebene Gerade fällen läßt? Die Gleichung der Geraden sei

1) $y \sin\varphi + x \cos\varphi = p$, 2) $y = Mx + n$,

3) $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. 4) $Lx + My + N = 0$.

Beispiele.

a) $3x = y - 5$, $x_1 = 1$, $y_1 = 13$.

b) $y + \frac{6}{5}x = 1$, $x_1 = 5{,}6$, $y_1 = 4{,}8$.

c) $\frac{y}{3} - \frac{x}{4} = 1$, $x_1 = -4$, $y_1 = -2$.

d) $7x - 6y + 8 = 0$, $x_1 = 10$, $y_1 = -1{,}1666\ldots$

e) $5y + 13x - 4 = 0$, $x_1 = 5$, $y_1 = -12{,}2$.

69. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Wie groß sind die Höhen desselben? Wie lang sind die Lote, die sich vom Koordinatenanfangspunkte auf die Seiten fällen lassen?

Beispiele.

a) $x_1 = 3, \quad y_1 = 5, \quad x_2 = 7, \quad y_2 = -4, \quad x_3 = -11, \quad y_3 = -13.$

b) $x_1 = -1, \quad y_1 = 7, \quad x_2 = 10, \quad y_2 = -2, \quad x_3 = 15, \quad y_3 = 17.$

70. Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks. Wie lang sind die Lote, die sich von dem Schwerpunkte des Dreiecks auf die Seiten fällen lassen?

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 7, \quad x_3 = 1, \quad y_3 = 6.$$

71. Gegeben seien die Gleichungen von zwei parallelen Geraden $y = 9x - 1$ und $y = 9x + 7$. Welchen Abstand haben beide voneinander?

72. Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu ziehen, deren Abstand von dem Punkte (x_2, y_2) gleich d ist. Welches ist die Gleichung der Geraden?

Beispiele.

a) $x_1 = 6,\ y_1 = 7,\ x_2 = 5,\ y_2 = -8,\ d = \sqrt{113}.$

b) $x_1 = 3,\ y_1 = 12,\ x_2 = 7,\ y_2 = 2,\ d = \sqrt{58}.$

73. Gegeben sind die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), ferner die Gerade $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$. Welche Beziehung muß zwischen den Konstanten bestehen, wenn die Strecke zwischen den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch die Gerade halbiert werden soll?

74. Es soll durch den Punkt (x_1, y_1) eine Gerade gezogen werden, so daß die Lote, welche sich von den Punkten (x_2, y_2) und (x_3, y_3) auf dieselbe fällen lassen, einander gleich sind.

Beispiele.

a) $x_1 = 7,\ y_1 = 11,\ x_2 = 3,\ y_2 = 4,\ x_3 = 9,\ y_3 = 5.$

b) $x_1 = -2,\ y_1 = 5,\ x_2 = 3,\ y_2 = -7,\ x_3 = -4,\ y_3 = 1.$

75. Der Koordinatenwinkel sei gleich 60^0. Wie lang ist das Lot, welches sich vom Punkte (x_1, y_1) auf die Gerade $Lx + My + N = 0$ fällen läßt?

Die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden.

76. Welches sind die Koordinaten des Punktes, in dem sich die beiden Geraden $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0,\ L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$ schneiden?

Beispiele.

a) $3x - 4y + 13 = 0,\ 11x + 7y - 104 = 0.$

b) $5x + y + 1 = 0,\ y = 17x + 13.$

c) $\frac{x}{10} + \frac{y}{7} = 1,\ y = 2x + 3.$

d) $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1,\ \frac{y}{13} + \frac{x}{21} = -1.$

77. Gegeben seien die Koordinaten von vier Punkten. Welches sind die Koordinaten des Punktes, in dem die Verbindungslinie des ersten und zweiten Punktes die des dritten und vierten durchschneidet?

Beispiel.

$x_1 = 4,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = 11,\ x_3 = -1,\ y_3 = -1,\ x_4 = -3,\ y_4 = 5.$

78. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien

$L_1 x + M_1 y + N_1 = 0,\ L_2 x + M_2 y + N_2 = 0,\ L_3 x + M_3 y + N_3 = 0.$

Welches sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks?

Beispiele.

a) $2x - 5y + 31 = 0$, $11x + 3y - 104 = 0$, $x + y + 7 = 0$.

b) $3x + 5y - 69 = 0$, $5x - 7y - 21 = 0$, $2x + 9y + 16 = 0$.

79. Gegeben seien die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks

$2y + 5x - 29 = 0$, $y - 9x + 43 = 0$, $y + 14x - 49 = 0$.

Zu bestimmen sind:

a) die Gleichungen der Schwerpunktstransversalen,

b) die Koordinaten des Schwerpunktes,

c) die Abstände des Schwerpunktes von den Seiten des Dreiecks.

80. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 = p_1$, $x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 = p_2$, $x\cos\varphi_3 + y\sin\varphi_3 = p_3$.

Wie lang sind die Höhen desselben?

81. (80.) Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn die Gleichungen derselben

$y + 3x + 4 = 0$, $5y - 3x - 34 = 0$, $2y - 3x - 1 = 0$

sind? Wie lang sind ferner die Höhen desselben?

82. (81.) Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn sich die drei Geraden, deren Gleichungen

$L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$, $L_3x + M_3y + N_3 = 0$

sind, in einem Punkte schneiden sollen?

a) Welche Form nimmt die Bedingungsgleichung an, wenn die Gleichungen der Geraden

$$y = A_1x + b_1, \quad y = A_2x + b_2, \quad y = A_3x + b_3$$

lauten?

83. (82.) Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks seien $(0, 0)$, $(x_2, 0)$, (x_3, y_3). Es ist zu zeigen, daß sich die Mittellinien desselben in einem Punkte schneiden.

84. (83.) Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn der Durchschnittspunkt zweier Geraden in der Unendlichkeit liegen soll? Die Gleichungen der Geraden seien

a) $y = A_1x + b_1$, $y = A_2x + b_2$.

b) $\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} = 1$, $\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} = 1$.

c) $L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$.

85. (84.) Auf den beiden Geraden

$$3x - 4y + 13 = 0, \quad 11x + 7y - 104 = 0$$

sind diejenigen Punkte zu bestimmen, welche von dem Schnittpunkte derselben die Entfernung 3 haben.

86. (85.) Gegeben seien die Gleichungen der Seiten eines Parallelogrammes:

$$y - 3x + 9 = 0, \quad 3y + 5x - 18 = 0,$$
$$y - 3x - 1 = 0, \quad 3y + 5x - 2 = 0.$$

Welches sind die Koordinaten der Eckpunkte? Welches sind die Gleichungen der Diagonalen? In welchem Punkte durchschneiden sich die Diagonalen?

87. (86.) Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks seien

$$3y - 8x - 13 = 0, \quad 2y - x - 13 = 0,$$
$$y + 7x - 44 = 0, \quad 8y - 3x + 2 = 0.$$

Wie lang sind die Seiten? Wie lang die Diagonalen desselben?

88. (87.) Aus den Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierseits

$y - 5x = 0$, $6y + 5x - 35 = 0$, $y - 3x + 21 = 0$, $4y + 9x = 0$

sollen bestimmt werden

a) die Koordinaten der Eckpunkte,
b) die Gleichungen der Diagonalen,
c) die Gleichungen der Verbindungslinien der Halbierungspunkte der Diagonalen.

89. (88.) In welchem Verhältnis wird die Verbindungslinie der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch die Gerade $Lx + My + N = 0$ geteilt?

Beispiele.

a) $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 11$, $y_2 = 13$; $6x + 5y - 30 = 0$.

b) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 6$, $y_2 = -3$; $y = 2x + 14$.

90. (89.) Gegeben seien vier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). In welchem Verhältnis teilt die Verbindungslinie der beiden ersten Punkte die der beiden letzten?

Beispiel.

$x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $x_2 = 5$, $y_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_3 = -2$, $x_4 = 10$, $y_4 = 3$.

91. (90.) Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks, nämlich (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Es ist zu zeigen, daß sich die Mittellinien desselben gegenseitig im Verhältnis 2 zu 1 teilen.

92. (91.) Gegeben seien die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks ABC, nämlich (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Eine Gerade $Lx + My + N = 0$ schneide die Seite AB in C_1, BC in A_1, CA in B_1. Welche Beziehung ergibt sich zwischen den Seitenabschnitten des Dreiecks?

93. (92.) Eine Gerade, deren Gleichung $Lx + My + N = 0$ sei, schneide die Seiten des Vierecks $ABCD$, und zwar AB in A_1, BC in B_1, CD in C_1, DA in D_1. Es soll die Relation entwickelt werden, welche zwischen den Seitenabschnitten besteht.

94. (93.) Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks ABC seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Von dem Punkte O, dessen Koordinaten (x_4, y_4) sind, mögen Gerade nach den Ecken gezogen und so weit verlängert sein, bis sie die Dreiecksseiten resp. deren Verlängerungen durchschneiden. Welche Relation ergibt sich für die Seitenabschnitte?

95. (94.) Drei Ecktransversalen mögen sich in einem Punkte schneiden und eine derselben die Gegenseite halbieren. In welchem Verhältnis werden die beiden andern Seiten durch ihre Transversalen geteilt?

Der Inhalt eines Polygons.

96. (95.) Gegeben seien die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Welches ist der Inhalt desselben? Welche geometrische Bedeutung hat demnach das in der Lösung von Aufgabe 56 gewonnene Resultat?

Beispiele.

a) $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 7$, $y_2 = 11$, $x_3 = 9$, $y_3 = 1$.

b) $x_1 = -2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 13$, $y_2 = 14$, $x_3 = 12$, $y_3 = 0$.

c) $x_1 = -3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 11$, $y_2 = 10$, $x_3 = 2$, $y_3 = -7$.

97. (96.) Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind

$$x_1 = 0,\ y_1 = \frac{s}{3}\sqrt{3},\ x_2 = \frac{s}{2},\ y_2 = -\frac{s}{6}\sqrt{3},\ x_3 = -\frac{s}{2},\ y_3 = -\frac{s}{6}\sqrt{3}.$$

Welches ist der Inhalt des Dreiecks?

98. (97.) Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0,\ L_2x + M_2y + N_2 = 0,\ L_3x + M_3y + N_3 = 0$$

soll der Inhalt desselben bestimmt werden. Welche geometrische Bedeutung hat das in der Lösung von Aufgabe 82 gewonnene Resultat?

Beispiele.

a) $y + 3x + 4 = 0$, $5y - 3x - 34 = 0$, $2y - 3x - 1 = 0$.

b) $9y + 13x - 131{,}2 = 0$, $71y + 31x - 104{,}8 = 0$,
$97y - 3x - 197{,}6 = 0$.

99. (98.) Auf der Geraden $y = 5x - 6$ sei eine Strecke abgeschnitten, deren Endpunkte die Abszissen $x_1 = 4$ und $x_2 = 7$ besitzen. Beide Endpunkte mögen mit dem Punkte $x_3 = 2$, $y_3 = 11$

durch gerade Linien verbunden sein. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Dreiecks?

100. (99.) Auf der Geraden $\frac{y}{4} - \frac{x}{23} = 1$ sei eine Strecke abgeschnitten, deren Endpunkte die Ordinaten $y_1 = -2$, $y_2 = 17$ besitzen. Beide Endpunkte mögen mit dem Punkte $x_3 = -10$, $y_3 = 37$ durch gerade Linien verbunden sein. Welches ist der Inhalt des von diesen Geraden gebildeten Dreiecks?

101. (100.) Die Punkte, in welchen die Gerade $x \cos 30^0 + y \sin 30^0 = 7$ die beiden Koordinatenachsen schneidet, mögen mit dem Punkte $x_1 = 11$, $y_1 = 13$ durch gerade Linien verbunden sein. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Dreiecks?

102. (101.) Drei Punkte der Geraden $5x + 7y - 9 = 0$, deren Abszissen $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = -17$ sind, mögen mit dem Punkte $x_4 = 5$, $y_4 = 12$ durch gerade Linien verbunden sein. Wie verhalten sich die Inhalte der so entstandenen Dreiecke?

103. (102.) Gegeben seien die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks:

$$x - 5y + 11 = 0, \quad 11x + 6y - 1 = 0, \quad x + y + 4 = 0.$$

Welches ist der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Halbierungspunkte der Seiten des gegebenen Dreiecks sind?

104. (103.) Durch die Schwerpunktstransversalen wird ein Dreieck in sechs Dreiecke zerlegt. In welcher Beziehung stehen die Inhalte derselben?

105. (104.) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks seien

$$x_1 = 10, \quad y_1 = 13, \quad x_2 = 2, \quad y_2 = -1, \quad x_3 = -5, \quad y_3 = 7.$$

Man halbiere die erste Seite, teile die zweite im Verhältnis 1 zu 2, die dritte im Verhältnis 2 zu 3 und verbinde die Teilpunkte. Welches ist der Inhalt des von den Verbindungslinien gebildeten Dreiecks?

106. (105.) In einem Dreieck sei jede Seite in drei gleiche Teile zerlegt, und die jeder Ecke zunächst liegenden Teilpunkte seien durch gerade Linien verbunden. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Sechsecks?

Beispiel.

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 7, \quad y_2 = 11, \quad x_3 = 9, \quad y_3 = 2.$$

107. (106.) Gegeben seien die Gleichungen der Seiten eines Parallelogramms

$$y = A_1 x + b_1, \quad y = A_2 x + b_2, \quad y = A_1 x + b_3, \quad y = A_2 x + b_4.$$

Welches ist der Inhalt der Figur?

Beispiel.

$y = 3x - 9, \quad y = \frac{1}{2}x - 3, \quad y = 3x + 5, \quad y = \frac{1}{2}x + 7.$

108. (107.) Die Gleichungen der vier Seiten eines Trapezes sind

$$y = M_1 x + n_1, \quad y = M_2 x, \quad y = M_1 x + n_2, \quad y = M_3 x.$$

Welches ist der Flächeninhalt des Trapezes?

Beispiel.

$y = -\frac{1}{3}x + 6, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad y = -\frac{1}{3}x + 13, \quad y = 3x.$

109. (108.) Die Koordinaten der Ecken eines Trapezoids sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). Wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

Beispiele.

a) $x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 5, \quad x_3 = 11, \quad y_3 = 9, \quad x_4 = 7, \quad y_4 = 0.$

b) $x_1 = -4, \quad y_1 = -3, \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 8, \quad x_3 = 7, \quad y_3 = 9, \quad x_4 = 6, \quad y_4 = 3.$

110. (109.) Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind

$$5y - 2x - 11 = 0, \quad y + 4x - 33 = 0, \quad 10y + x + 21 = 0, \quad 3y - 5x + 1 = 0.$$

Man halbiere die Seiten und verbinde die Teilpunkte durch gerade Linien. Welches ist der Inhalt des eingeschriebenen Vierecks?

111. (110.) Wie läßt sich nachweisen, daß das nach Aufgabe 110 eingeschriebene Viereck ein Parallelogramm ist? Wie verhält sich der Inhalt desselben zu dem des gegebenen Vierecks?

112. (111.) Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Fünfecks:

$x_1 = -5, \quad y_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad y_2 = 4, \quad x_3 = 4, \quad y_3 = 5, \quad x_4 = 5, \quad y_4 = -2, \quad x_5 = 1, \quad y_5 = -6.$

Wie groß ist der Inhalt des Fünfecks?

113. (112.) Jede Seite eines Trapezoids sei in drei gleiche Teile zerlegt und die jeder Ecke zunächst liegenden Teilpunkte durch gerade Linien verbunden. Wie groß ist der Inhalt des so entstandenen Achtecks?

Beispiel.

$x_1 = 2, \quad y_1 = 3, \quad x_2 = 7, \quad y_2 = 5, \quad x_3 = 9, \quad y_3 = -3, \quad x_4 = -1, \quad y_4 = -2.$

114. (113.) Aus den Koordinaten der n Ecken eines n-Ecks soll der Inhalt desselben berechnet werden.

Gerade Linien, welche durch einen Punkt gehen.

115. (114.) Es ist die Gleichung einer beliebigen Geraden zu bestimmen, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0 \quad \text{und} \quad L_2x + M_2y + N_2 = 0$$

geht.

116. (115.) Welche Werte muß man k in der Gleichung

$$L_1x + M_1y + N_1 + k(L_2x + M_2y + N_2) = 0$$

erteilen, damit dieselbe auch den Fundamentallinien entspricht?

117. (116.) Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0, \quad L_2x + M_2y + N_2 = 0$$

und den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu legen. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele.

a) $5x - 2y + 3 = 0, \quad 13x + y - 1 = 0, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0.$

b) $2x + 5y - 8 = 0, \quad 3x - 4y - 8 = 0, \quad x_1 = 1, \quad y_1 = 11.$

c) $17x + 21y + 1 = 0, \quad 11x + 2y - 3 = 0, \quad x_1 = -4, \quad y_1 = 3.$

118. (117.) Durch den Schnittpunkt der Geraden

$$5x - 4y + 3 = 0, \quad 7x + 11y - 1 = 0$$

ist eine Gerade zu legen, die auf dem positiven Teile der Y-Achse eine Strecke gleich 6 abschneidet. Welches ist die Gleichung derselben?

119. (118.) Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$y = 7x - 4, \quad y = -2x + 5$$

soll eine Gerade gezogen werden, welche mit der X-Achse einen Winkel von 60^0 einschließt.

120. (119.) Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2y - 3x - 11 = 0, \quad 7y + 6x - 55 = 0$$

ist eine Gerade zu ziehen, deren Abstand vom Koordinatenanfangspunkte gleich 5 ist.

121. (120.) Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0 \quad \text{und} \quad L_2x + M_2y + N_2 = 0$$

ist eine Gerade zu ziehen, welche die Strecke zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) im Verhältnis m zu n teilt.

122. (121.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Geraden:

$$24y - 16x + 17 = 0 \text{ und } 8y - 40x + 179 = 0.$$

Durch den Schnittpunkt derselben ist eine Gerade zu legen, so daß das von ihr und den Abschnitten auf den positiven Achsenteilen gebildete Dreieck den Inhalt 28 □ hat.

123. (122.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Geradenpaare:

$$5y - 2x - 11 = 0, \quad y + 4x - 33 = 0$$

und $$10y + x + 21 = 0, \quad 3y - 5x + 1 = 0.$$

Welches ist die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt des ersten Paares mit dem des zweiten Paares verbindet?

124. (123.) Es ist zu zeigen, daß die drei Geraden

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0, \quad L_2x + M_2y + N_2 = 0, \quad L_3x + M_3y + N_3 = 0$$

durch einen Punkt gehen, wenn sich drei Konstante k_1, k_2, k_3 finden lassen, die so beschaffen sind, daß die Summe

$$k_1(L_1x + M_1y + N_1) + k_2(L_2x + M_2y + N_2) + k_3(L_3x + M_3y + N_3)$$

für alle möglichen Werte von x und y verschwindet.

125. (124.) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$$y = 0, \quad y = \frac{y_3}{x_3}x, \quad y - y_3 = \frac{y_3}{x_3 - x_2}(x - x_3).$$

Es ist zu zeigen, daß die drei Mittellinien desselben durch einen Punkt gehen.

Bestimmung des Winkels, welchen zwei gerade Linien einschließen.

126. (125.) Aus den Gleichungen zweier Geraden

$$y = A_1x + b_1 \text{ und } y = A_2x + b_2$$

soll der Winkel bestimmt werden, den beide miteinander einschließen: 1. für rechtwinklige Koordinaten, 2. für schiefwinklige Koordinaten (Koordinatenwinkel ω).

Beispiele.

a) $y = 3x + 5, \quad y = 7x - 2.$

b) $3x + 5y - 1 = 0, \quad 11x - 2y + 3 = 0.$

c) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1, \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1.$

d) $x \cos 60^0 + y \sin 60^0 = 5, \quad x \cos 45^0 + y \sin 45^0 = 11.$

e) $2y - 7x + 1 = 0, \quad y = \frac{3}{2}x - 3$ (Koordinatenwinkel 60^0).

127. (126.) Welchen Winkel schließen die beiden Strahlen ein, welche in einem rechtwinkligen Koordinatensystem von den Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) nach dem Koordinatenanfangspunkte gezogen sind?

Beispiel. $x_1 = 11,\ y_1 = 1,\ x_2 = 7,\ y_2 = 8.$

128. (127.) Von zwei geraden Linien schneidet die eine auf den positiven Teilen der X-Achse und Y-Achse die Strecken 3 und 4, die andre die Strecken 7 und 5 ab. Welchen Winkel schließen die beiden Geraden miteinander ein?

129. (128.) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind $L_1x + M_1y + N_1 = 0,\ L_2x + M_2y + N_2 = 0,\ L_3x + M_3y + N_3 = 0.$ Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

Beispiele.

a) $8y + x + 11 = 0,\quad 3y - 2x - 1 = 0,\quad 5y + 4x + 6 = 0.$

b) $2y + 5x - 29 = 0,\quad y - 9x + 43 = 0,\quad y + 14x - 49 = 0.$

130. (129.) Gegeben die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks. Welche Winkel schließen die Schwerpunktstransversalen desselben miteinander ein?

Beispiel.

$x_1 = 5,\ y_1 = -7,\ x_2 = 1,\ y_2 = 11,\ x_3 = -4,\ y_3 = 13.$

131. (130.) In dem Dreieck, dessen Eckpunkte die Koordinaten

$$x_1 = 1,\ y_1 = 3,\ x_2 = 5,\ y_2 = 1,\ x_3 = 3,\ y_3 = 7$$

besitzen, mögen die Halbierungspunkte der Seiten durch gerade Linien verbunden werden. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks, welches auf diese Weise entsteht?

132. (131.) Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind $2y - 3x + 4 = 0,\ 3y + 8x - 69 = 0,\ 2y - x + 11 = 0,\ 3y + 4x - 11 = 0.$ Wie groß sind die Winkel desselben?

133. (132.) Die Koordinaten der Ecken eines Vierecks sind $x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ x_2 = 7,\ y_2 = 5,\ x_3 = 9,\ y_3 = -3,\ x_4 = -1,\ y_4 = -2.$ Unter welchem Winkel schneiden sich die Verbindungslinien der Halbierungspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten?

134. (133.) Aus den Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierseits

$y + 3x + 4 = 0,\ 5y - 3x - 34 = 0,\ y - x - 4 = 0,\ y - 3x - 2 = 0$

sind die Winkel zu bestimmen, unter welchen die Diagonalen gegeneinander geneigt sind.

135. (134.) Eine durch den Punkt (x_1, y_1) gezogene Gerade teile den Abstand der beiden Punkte (x_2, y_2) und (x_3, y_3) im Verhältnis m zu n. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden?

Beispiel.

$x_1 = 10,\ y_1 = 4,\ x_2 = 3,\ y_2 = 5,\ x_3 = 9,\ y_3 = 11,\ m = 2,\ n = 3.$

136. (135.) Welcher Bedingungsgleichung müssen die Konstanten der Gleichungen

$$L_1 x + M_1 y + N_1 = 0,\quad L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$$

genügen, wenn die denselben entsprechenden Geraden einen Winkel von 45^0 miteinander einschließen sollen?

137. (136.) Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Gerade zu ziehen, welche mit der Geraden $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$ den Winkel α einschließt.

Beispiele.

a) $3y - 2x + 7 = 0,\ x_1 = 3,\quad y_1 = 5,\quad \angle\, \alpha = 45^0.$

b) $5x + 11y - 1 = 0,\ x_1 = -2,\ y_1 = 6,\quad \angle\, \alpha = 30^0.$

138. (137.) Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$2x + 5y + 8 = 0,\quad 3x - 4y - 7 = 0$$

ist eine gerade Linie zu ziehen, die mit der Geraden $y = 4x + 3$ einen Winkel von 60^0 einschließt.

139. (138.) Die Koordinaten von zwei Eckpunkten eines Dreiecks sind gegeben: $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = -4$. An der ersten Ecke liege der Winkel $\alpha = 61^0\ 50'\ 15''$, an der zweiten der Winkel $\beta = 87^0\ 23'\ 50''$. Welches sind die Gleichungen der Seiten, die diesen Winkeln gegenüberliegen?

Parallele Gerade.

140. (139.) Unter welcher Bedingung laufen die beiden Geraden $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$ und $L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$ einander parallel? Welche Form hat die Bedingungsgleichung, wenn die Gleichungen der Geraden $\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} = 1$ und $\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} = 1$ oder $y = A_1 x + b_1$ und $y = A_2 x + b_2$ sind?

141. (140.) Durch den Punkt $x_1 = 5,\ y_1 = 7$ ist zu der Geraden, deren Gleichung $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1$ ist, eine Parallele zu ziehen. Welches ist die Gleichung derselben?

142. (141.) Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und der Strecke, welche die Punkte (x_2, y_2) und (x_3, y_3) verbindet, parallel läuft.

Beispiel.

$x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ x_2 = -2,\ y_2 = 7,\ x_3 = -4,\ y_3 = -5.$

143. (142.) Zu der Geraden $4x + 5y + 11 = 0$ sollen in der Entfernung $p = 3$ Parallelen gezogen werden. Welches sind die Gleichungen derselben?

144. (143.) Gegeben seien drei Gerade: $L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$, $L_3x + M_3y + N_3 = 0$. Welchen Wert muß man k in der Gleichung $L_1x + M_1y + N_1 + k(L_2x + M_2y + N_2) = 0$ erteilen, wenn die derselben entsprechende Gerade der Geraden $L_3x + M_3y + N_3 = 0$ parallel laufen soll?

145. (144.) Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der Geraden $3x + 2y - 59 = 0$, $5x - 7y + 6 = 0$ geht und a) der X-Achse, b) der Geraden $y + 2x - 1 = 0$ parallel läuft?

146. (145.) Durch den Scheitel des Winkels, welcher von den beiden Geraden $y = \frac{1}{2}x + 5$ und $y = 2x - 7$ gebildet wird, sei eine Parallele zu der Geraden $3y - 2x + 5 = 0$ gezogen. In welche Teile wird durch dieselbe der Winkel zerlegt?

147. (146.) Gegeben seien die Gleichungen von zwei parallelen Geraden $y = M_1x + n_1$, $y = M_1x + n_2$. Es soll die Gleichung einer dritten Geraden gesucht werden, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und von den beiden Parallelen so geschnitten wird, daß der Abschnitt zwischen denselben die Länge d hat.

Beispiel.

$3y + 4x - 12 = 0,\ 3y + 4x - 5 = 0,\ d = 3,\ x_1 = -2,\ y_1 = -7.$

Gerade Linien, welche sich rechtwinklig durchschneiden.

148. (147.) Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn sich zwei Gerade rechtwinklig durchschneiden sollen? Die Gleichungen der beiden Geraden seien a) $L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$; b) $y = A_1x + b_1$, $y = A_2x + b_2$; c) $\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} = 1$, $\frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} = 1$.

149. (148.) Von dem Punkte (x_1, y_1) ist auf die Gerade $Lx + My + N = 0$ ein Lot zu fällen. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiele.

a) $y = 4x - 7, \quad x_1 = 3, \quad y_1 = -13.$

b) $7y + 23x - 5 = 0, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 9.$

150. (149.) Von dem Koordinatenanfangspunkte sei auf die Gerade $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 1 = 0$ ein Lot gefällt. Welches ist die Gleichung desselben? Welche Winkel schließt dasselbe mit den Koordinatenachsen ein?

151. (150.) Auf der Geraden $5x - 7y + 1 = 0$ ist in dem Punkte, dessen Abszisse gleich 11 ist, ein Lot zu errichten. Welches ist die Gleichung desselben?

152. (151.) Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, welche die Strecke zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) unter rechtem Winkel im Verhältnis m zu n teilt.

Beispiel.

$x_1 = -3, \quad y_1 = 7, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -4, \quad m = 4, \quad n = 7.$

153. (152.) In welchem Punkte schneidet das Lot, welches vom Punkte (x_1, y_1) auf die Gerade $y = Mx + n$ gefällt ist, die letztere? Welche Stücke schneidet dasselbe auf den Koordinatenachsen ab?

Beispiel. $y = \frac{4}{7}x + 3, \quad x_1 = 5, \quad y_1 = 9.$

154. (153.) Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $2x - 3y + 7 = 0$ und $5x - 4y - 3 = 0$ ist ein Lot auf die Gerade $y = \frac{7}{8}x + 2$ zu fällen. Welches ist die Gleichung desselben?

155. (154.) In dem Schnittpunkte der beiden Geraden $2x + 5y + 8 = 0$ und $3x - 4y - 7 = 0$ ist auf der letzteren ein Lot zu errichten. Welches ist die Gleichung desselben?

156. (155.) Von dem Schnittpunkte der beiden Geraden

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1, \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$$

sei ein Lot auf die Gerade $y + 3x + 2 = 0$ gefällt. In welche Teile wird durch das Lot der Winkel zerlegt, der von den beiden ersten Geraden gebildet wird?

157. (156.) Von dem Punkte $x_1 = 4, \quad y_1 = 5$ seien Lote auf die beiden Geraden $y - 2x - 7 = 0$ und $2y + 3x - 6 = 0$ gefällt. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Vierecks?

158. (157.) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$$2y + x - 11 = 0, \quad 2y - 9x + 59 = 0, \quad 6y - 7x - 3 = 0.$$

Welches sind die Gleichungen der Höhen desselben?

159. (158.) Aus den Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind die Gleichungen der Höhen desselben zu entwickeln.

Beispiel.

$$x_1 = -1, \quad y_1 = -1, \quad x_2 = -3, \quad y_2 = 5, \quad x_3 = 7, \quad y_3 = 11.$$

160. (159.) Es ist zu zeigen, daß sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkte durchschneiden. Welches ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks, von dem die Koordinaten der Ecken in der vorhergehenden Aufgabe gegeben sind?

161. (160.) Man verbinde den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 2$ mit dem Schnittpunkte der Geraden $2y + x - 11 = 0$ und $2y - 9x + 59 = 0$ und errichte im Halbierungspunkte dieser Strecke ein Lot. Welches ist die Gleichung desselben?

162. (161.) Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks. Welches sind die Gleichungen der Lote, die sich in den Halbierungspunkten der Seiten errichten lassen?

Beispiel.

$$x_1 = 5, \quad y_1 = -7, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 11, \quad x_3 = -4, \quad y_3 = 13.$$

163. (162.) Es ist zu zeigen, daß sich die in den Halbierungspunkten der Seiten eines Dreiecks errichteten Lote in einem Punkte durchschneiden.

164. (163.) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$$y + x + 1 = 0, \quad 5y + 3x + 11 = 0, \quad 2y + x + 4 = 0.$$

Die Seiten seien halbiert und in den Halbierungspunkten Lote auf denselben errichtet. Welches sind die Koordinaten des Schnittpunktes der Lote? Wie weit ist der Schnittpunkt von jeder Ecke des Dreiecks entfernt?

165. (164.) Von dem Punkte (x_1, y_1) seien Lote auf die beiden Geraden $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$ und $L_2 x + M_2 y + N_2 = 0$ gefällt. Wie groß ist der Winkel, den die beiden Lote miteinander einschließen?

166. (165.) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks sind (0, 0), (5, 0), (3, 7). Von dem Punkte (3, 7) sei ein Lot auf die gegenüberliegende Seite gefällt und von dem Fußpunkte desselben Lote auf die beiden andern Seiten und auf die zu diesen gehörigen Höhen. Es ist zu zeigen, daß die Fußpunkte dieser vier Lote in einer Geraden liegen.

Die Halbierungslinie eines Winkels.

167. (166.) Gegeben sind die Gleichungen zweier geraden Linien. Es sollen die Gleichungen der Halbierungslinien der Winkel gefunden werden, welche die beiden Geraden miteinander bilden. Die Gleichungen der Geraden seien

1. $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0.$
2. $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0, \quad L_2 x + M_2 y + N_2 = 0.$

Beispiele.

a) $y = \frac{3}{4} x - 7, \quad y = \frac{4}{3} x + 17.$

b) $21x + 20y + 37 = 0, \quad 30x - 16y + 19 = 0.$

168. (167.) Es ist zu zeigen, daß die Halbierungslinien der Winkel zweier Geraden aufeinander senkrecht stehen.

169. (168.) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind

$$6y - 8x - 43 = 0, \quad 5y + 12x - 34 = 0, \quad 4y + 3x + 13 = 0.$$

Es sind die Gleichungen der Halbierungslinien der Innenwinkel und der Außenwinkel desselben zu bestimmen.

170. (169.) Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks: $(0, 0)$, $(x_2, 0)$, (x_3, y_3). Welches sind die Gleichungen der Halbierungslinien der Dreieckswinkel?

171. (170.) Wie läßt sich nachweisen, daß sich die Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks in einem Punkte schneiden?

172. (174.) Es ist zu zeigen, daß die Halbierungslinien zweier Außenwinkel und des dritten Innenwinkels eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

173. (171.) Wie verhalten sich die Abstände des Schnittpunktes der Halbierungslinien des Innen- bzw. Außenwinkels von den Seiten des Dreiecks?

174. (172.) In welchem Verhältnis wird jede Seite eines Dreiecks durch die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Winkels geteilt?

175. (173.) Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks

$$3x + 7y - 23 = 0, \quad 3x - 7y - 65 = 0, \quad x - 7 + \sqrt{58} = 0$$

sind zu bestimmen 1. die Koordinaten des Punktes, in dem sich die Winkelhalbierenden durchschneiden, 2. der Abstand dieses Punktes von den Seiten des Dreiecks.

176. (175.) In dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Eckpunkte $(0, 0)$, $(x_2, 0)$, (x_3, y_3) sind, sei der rechte Winkel halbiert und auf der Hypotenuse in dem Punkte, in dem sie von der Halbierungslinie getroffen wird, das Lot errichtet. In welchem Verhältnis wird dieses Lot durch die Seiten des Dreiecks geteilt?

177. (176.) Aus den Koordinaten der Ecken eines Vierecks

$$x_1 = -3, \quad y_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad y_2 = 6, \quad x_3 = 10, \quad y_3 = 9,$$
$$x_4 = 5, \qquad y_4 = -4$$

sind die Gleichungen der Geraden zu bestimmen, welche die Winkel der Diagonalen halbieren.

178. (177.) Die Koordinaten der Ecken eines regulären Sechsecks sind

$$x_1 = 0, \; y_1 = s, \; x_2 = \frac{s}{2}\sqrt{3}, \; y_2 = \frac{s}{2}, \; x_3 = \frac{s}{2}\sqrt{3}, \; y_3 = -\frac{s}{2}, \; x_4 = 0,$$

$$y_4 = -s, \quad x_5 = -\frac{s}{2}\sqrt{3}, \quad y_5 = -\frac{s}{2}, \quad x_6 = -\frac{s}{2}\sqrt{3}, \quad y_6 = \frac{s}{2}.$$

In welchem Punkte schneiden sich die Halbierungslinien der Winkel des Polygons?

Geometrische Örter.

179. (178.) Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, welcher von der gegebenen Geraden $Lx + My + N = 0$ die Entfernung a hat.

180. (179.) Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte aller Strahlen, welche sich von dem Punkte (x_1, y_1) nach der Verbindungslinie der Punkte (x_2, y_2) und (x_3, y_3) ziehen lassen?

Beispiel.

$$x_1 = -4, \quad y_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 11, \quad x_3 = 5, \quad y_3 = 3.$$

181. (180.) Es ist der geometrische Ort eines Punktes P zu bestimmen, dessen Entfernung vom Koordinatenanfangspunkte doppelt so groß ist als sein lotrechter Abstand von der Geraden $y - x = 0$.

182. (181.) Von dem Punkte (x_1, y_1) seien nach der Geraden

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

Strahlen gezogen und jeder derselben im Verhältnis m zu n geteilt. Welches ist der geometrische Ort des Teilpunktes?

183. (182.) Es ist der geometrische Ort des Punktes zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gleichweit entfernt ist.

184. (183.) Gegeben zwei parallele Gerade

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p_1 = 0, \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - p_2 = 0.$$

Es soll der geometrische Ort desjenigen Punktes bestimmt werden, der gleichweit von beiden Geraden entfernt ist.

185. (184.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Geraden

$$y = M_1 x + n_1 \quad \text{und} \quad y = M_2 x + n_2.$$

Man soll den geometrischen Ort desjenigen Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von den gegebenen Geraden um die Strecke d verschieden sind.

186. (185.) Welches ist der geometrische Ort desjenigen Punktes, für den die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) den Wert a^2 hat?

187. (186.) Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels möge sich ein Punkt fortbewegen, so daß die Summe seiner Abstände von den beiden Schenkeln gleich einer gegebenen Strecke s ist. Welchen Weg verfolgt der Punkt?

188. (187.) Gegeben seien die Gleichungen von n Geraden

$$\begin{aligned} x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 &= 0, \\ x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 &= 0, \\ &\vdots \\ x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - p_n &= 0. \end{aligned}$$

Es soll der geometrische Ort des Punktes bestimmt werden, für welchen die Summe der Entfernungen von den gegebenen Geraden gleich der bekannten Strecke s ist.

189. (188.) Zwischen den Schenkeln eines Winkels möge sich ein Punkt so fortbewegen, daß die durch ihn zu den Schenkeln gezogenen Parallelen stets einander gleich sind. Welche Linie beschreibt der Punkt?

190. (189.) Zwischen den Schenkeln eines Winkels befinde sich ein Punkt P. Die Summe der durch denselben zu den Schenkeln gezogenen Parallelen möge gleich s sein. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

191. (190.) Welches ist der geometrische Ort des Punktes P in der vorhergehenden Aufgabe, wenn die Differenz der durch ihn zu den Schenkeln gezogenen Parallelen gleich d ist?

192. (191.) Die Schenkel eines Winkels entsprechen den Gleichungen $L_1x + M_1y + N_1 = 0$, $L_2x + M_2y + N_2 = 0$. Zwischen denselben bewegt sich ein Punkt fort, dessen Entfernungen von ihnen im Verhältnis m zu n stehen. Welche Linie beschreibt der Punkt?

193. (192.) Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels seien Parallelen zu einer gegebenen Geraden gezogen und jede derselben im Verhältnis m zu n geteilt. In welcher Linie liegen die Teilpunkte?

194. (193.) Die Schenkel eines rechten Winkels werden von einer Geraden g unter den Winkeln α und β geschnitten, und die Halbierungslinien der Winkel α und β schneiden sich im Punkte P. Welche Linie beschreibt der Punkt P, wenn die Gerade g so fortgerückt wird, daß sie ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt?

195. (194.) Die Endpunkte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mögen auf den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems fortgleiten. Welche Linie beschreibt der Scheitel des rechten Winkels?

196. (195.) Die rechtwinkligen Koordinaten des Scheitels eines rechten Winkels seien x_1, y_1. Man verbinde die Punkte, in denen der eine Schenkel die Y-Achse, der andre die X-Achse schneidet. Welche Linie beschreibt derjenige Punkt, welcher die Verbindungslinie jener Schnittpunkte im Verhältnis m zu n teilt, wenn der rechte Winkel um seinen Scheitel gedreht wird?

197. (196.) Vom Koordinatenanfangspunkte sind nach einer Geraden, deren Gleichung $y = Mx + n$ ist, Strahlen gezogen, und über jedem dieser Strahlen ist ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Auf welcher Linie liegen die Spitzen dieser gleichseitigen Dreiecke?

198. (197.) Über einer gegebenen Strecke a als Basis sind Dreiecke konstruiert, von denen jedes den Umfang s besitzt. In jedem derselben ist die Höhe gezeichnet und über die Spitze hinaus verlängert bis zu einem Punkte, der von der Basis um die Länge der einen anstoßenden Seite entfernt ist. In welcher Linie liegen die Endpunkte?

199. (198.) Über der Grundlinie a eines Dreiecks seien Rechtecke in dasselbe eingezeichnet. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Diagonalen?

200. (199.) In einem Dreieck sei parallel zur Basis eine Gerade gezogen, und die Schnittpunkte in den Seiten seien mit den Endpunkten der Basis verbunden. Welche Linie beschreibt der

Schnittpunkt der Transversalen, wenn die Gerade so verschoben wird, daß sie der Basis parallel bleibt?

201. (200.) In gleichen Abständen von der Basis eines Dreiecks seien auf den beiden andern Seiten Lote errichtet. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Lote?

202. (201.) Gegeben sei ein Winkel α. Von einem Punkte P mögen Lote auf die Schenkel desselben gefällt sein. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn die Summe der Abschnitte, welche von den Loten auf den Schenkeln gebildet werden, gleich der gegebenen Strecke s sein soll?

203. (202.) Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt P in der vorigen Aufgabe, wenn die Differenz der Abschnitte, welche von den Loten auf den Schenkeln gebildet werden, gleich d sein soll?

204. (203.) Von einem Parallelogramm seien die Richtungen zweier aneinanderstoßenden Seiten und die Summe aller Seiten gegeben. Welches ist der geometrische Ort derjenigen Ecke des Parallelogramms, welche dem Schnittpunkt der Richtungslinien gegenüberliegt?

205. (204.) Gegeben ist der Winkel AOB. Von einem festen Punkte P werden zwei beliebige Strahlen gezogen, welche den Schenkel OA in L und M, den Schenkel OB in R und N durchschneiden mögen. Man verbinde R mit M und N mit L und bestimme den geometrischen Ort des Schnittpunktes dieser beiden Verbindungslinien.

206. (205.) In einem Dreieck liege die konstante Seite $AB = c$ fest, die nach dem Halbierungspunkte von BC gerichtete Ecktransversale sei gegen c unter dem Winkel α geneigt. Welches ist der geometrische Ort der Ecke C des Dreiecks?

207. (206.) Über der Strecke $AB = c$ seien Dreiecke konstruiert, in denen die Tangenten der Winkel, welche an der Seite c liegen, sich wie m zu n verhalten. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C?

208. (207.) Über der konstanten Seite $AB = c$ seien Dreiecke konstruiert, in denen sich die Höhe h_c zur Seite BC wie m zu n verhält. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C?

Anmerkung. In den Aufgaben 209—216 liege das Dreieck ABC so, daß die Seite AB mit der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt. Die fünf merkwürdigen Punkte des Dreiecks sind der Schwerpunkt, der Höhenpunkt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, der Schnittpunkt der Ecktransversalen, welche nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise gezogen sind.

209. (208.) Welche Linien beschreiben die fünf merkwürdigen Punkte des Dreiecks ABC, wenn die Winkel konstant, die Längen der Seiten veränderlich sind?

210. (209.) Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises im Dreieck ABC, wenn die Seite a und der gegenüberliegende Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

211. (210.) Welche Linie beschreibt der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, wenn die Seite b und der Winkel B konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

212. (211.) Welche Linien beschreiben der Höhenpunkt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der Schwerpunkt und der fünfte merkwürdige Punkt des Dreiecks ABC, wenn die Seite a und der anliegende Winkel B konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

213. (212.) Die geometrischen Örter der vier ersten merkwürdigen Punkte des Dreiecks ABC sind anzugeben, wenn die Seite b und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind.

214. (213.) Welche Linien beschreiben die Mittelpunkte des umschriebenen und des einbeschriebenen Kreises des Dreiecks ABC, wenn nur die Seite b und der Winkel C konstante Werte haben?

215. (214.) Die geometrischen Örter der vier ersten merkwürdigen Punkte des Dreiecks ABC anzugeben, wenn die Seite c und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind.

216. (215.) Welches ist der geometrische Ort des Schwerpunktes, wenn die Grundlinie c konstant ist und fest liegt, dagegen die gegenüberliegende Spitze C sich auf der Geraden $y = Mx + n$ fortbewegt?

217. (216.) Von einem Dreieck ist ein Winkel α und die Summe der ihn einschließenden Seiten (s) gegeben. Es soll der geometrische Ort desjenigen Punktes gesucht werden, der die dritte Seite im Verhältnis m zu n teilt.

Vermischte Aufgaben.

218. (217.) Gegeben ist der Winkel α. Durch den Punkt (x_1, y_1) soll eine Gerade gezogen werden, so daß das zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Stück eine Größe a hat. Die Gleichung der Geraden ist zu bestimmen.

219. (218.) Zwischen den beiden Geraden, deren Gleichungen

$$4y - 3x - 26 = 0 \quad \text{und} \quad 6y - 7x - 44 = 0$$

sind, ist eine Strecke $d = 32{,}5$ so einzutragen, daß sie der Geraden $12y + 5x - 79 = 0$ parallel läuft. Welches wird die Gleichung der einzutragenden Strecke sein?

220. (219.) Auf der Geraden $4y - 5x + 28 = 0$ soll ein Punkt bestimmt werden, der von den beiden Punkten $x_1 = 1$, $y_1 = 5$ und $x_2 = 7$, $y_2 = -3$ gleichweit entfernt ist.

221. (220.) Auf der Geraden $y - x - 5 = 0$ sei eine Strecke abgeschnitten, deren Endpunkte die Abszissen $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ besitzen, auf der Geraden $5y + 4x - 11 = 0$ eine Strecke, deren Endpunkte durch die Abszissen $x_3 = 4$, $x_4 = 9$ bestimmt sind. Über jeder dieser Strecken sei ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert, so daß die Spitzen zusammenfallen. Welches sind die Koordinaten der gemeinschaftlichen Spitze?

222. (221.) Es sind die Koordinaten desjenigen Punktes zu bestimmen, der von den beiden Punkten

$$x_1 = 4, \quad y_1 = -3, \quad x_2 = 7, \quad y_2 = -1$$

gleichweit entfernt ist und zugleich von der Geraden $\frac{y}{8} + \frac{x}{15} = 1$ die Entfernung $d = 3$ besitzt.

223. (222.) Durch den Punkt (x_1, y_1) soll eine Gerade gezogen werden und zwar so, daß die Entfernungen des Punktes (x_2, y_2) und des Punktes (x_3, y_3) von derselben sich wie m zu n verhalten.

224. (223.) Gegeben ist ein Winkel und zwischen den Schenkeln desselben ein Punkt P. Durch den Punkt ist eine Gerade zu legen, so daß die Strecke zwischen beiden Schenkeln in dem gegebenen Punkte P halbiert wird. Welches ist die Gleichung der Geraden?

225. (224.) Gegeben sind die beiden Geraden $y = M_1 x$ und $y = M_2 x$, ferner der Punkt $P\ (a, b)$, welcher außerhalb des von den beiden Geraden gebildeten spitzen Winkels liegt. Es soll eine Gerade durch P gezogen werden, die beide Schenkel schneidet, so daß das Stück außerhalb des spitzen Winkels gleich dem zwischen den Schenkeln liegenden Abschnitte ist.

226. (225.) Durch den Punkt $x_1 = 7$, $y_1 = 10$ ist eine Gerade zu ziehen, die von den aus den Punkten $x_2 = 1{,}5$, $y_2 = 9$, $x_3 = 9$, $y_3 = 15\frac{2}{3}$ auf sie gefällten Loten begrenzt und im ersten Punkte halbiert wird. Welches ist die Gleichung dieser Geraden?

227. (226.) Welches ist die Gleichung einer von dem Punkte (x_1, y_1) aus gezogenen Geraden, deren Abstände von den Punkten (x_2, y_2) und (x_3, y_3) eine Differenz gleich d haben?

228. (227.) Die Strecke zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) möge in dem Punkte (x_3, y_3) stetig geteilt sein. Welche Beziehungen finden dann zwischen den Koordinaten der Punkte statt?

229. (228.) Die Strecke zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) möge in den Punkten (x_3, y_3) und (x_4, y_4) harmonisch geteilt sein. Welche Beziehungen lassen sich in diesem Falle zwischen den Koordinaten der vier Punkte aufstellen?

230. (229.) Es ist zu zeigen, daß der Höhenpunkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises eines Dreiecks in einer geraden Linie liegen. In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Strecke zwischen dem Höhenpunkte und dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises?

231. (230.) Wie kann man nachweisen, daß in einem Dreieck der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, der Schwerpunkt und der fünfte merkwürdige Punkt in einer Geraden liegen? In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Strecke zwischen den beiden andern Punkten?

232. (231.) Die Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierseits sind

$$\frac{y}{7} + \frac{x}{2} = 1, \qquad -\frac{y}{1} + \frac{x}{2} = 1, \qquad -\frac{y}{1} - \frac{x}{4} = 1, \qquad \frac{y}{7} - \frac{x}{4} = 1.$$

Es ist nachzuweisen, daß die Halbierungspunkte der Diagonalen desselben in einer geraden Linie liegen.

233. (232.) Auf der Geraden, deren Gleichung $y - 2x + 5 = 0$ ist, soll ein Punkt bestimmt werden, so daß die von den Punkten $x_1 = 17$, $y_1 = 13$, $x_2 = 9$, $y_2 = 3$ nach demselben gezogenen Strahlen gleiche Winkel mit der Geraden einschließen.

234. (233.) Die Grundlinie eines Dreiecks liegt auf einer Geraden, deren Gleichung $55y + 18x - 256 = 0$ ist. Die Endpunkte derselben sind durch ihre Abszissen $x_1 = 2$, $x_2 = 7{,}5$ bestimmt. Aus den Koordinaten des Schwerpunktes $x' = 5$, $y' = 6$ sollen die übrigen Stücke des Dreiecks gefunden werden.

235. (234.) Auf der Geraden $15y - 8x - 6 = 0$ ist eine Strecke abgeschnitten, deren Endpunkte die Abszissen $x_1 = 3$, $x_2 = 18$ haben, und über dieser Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Welches sind die Koordinaten der dritten Ecke des Dreiecks?

236. (235.) Durch den Punkt $x_1 = 5,\ y_1 = 3$ sollen gerade Linien gezogen werden, von denen jede mit den beiden sich schneidenden Geraden $9x + 40y - 123 = 0,\ 21x - 20y - 29 = 0$ ein gleichschenkliges Dreieck einschließt. Welches sind die Gleichungen der gesuchten Geraden?

237. (236.) Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind $x_1 = 5,\ y_1 = 2,\ x_2 = 4,\ y_2 = -7,\ x_3 = 3,\ y_3 = 7$. Die erste Seite desselben möge im Verhältnis 4 zu 7 geteilt und durch den Teilungspunkt eine Parallele zur zweiten Seite gezogen werden. Welches ist die Gleichung der Parallelen? Welche Winkel schließt dieselbe mit den geschnittenen Seiten ein?

238. (237.) Gegeben ist der Winkel α durch die Richtung seiner Schenkel und der Punkt P. Durch den letzteren ist eine Gerade zu ziehen, so daß der Abschnitt derselben zwischen den beiden Schenkeln gleich dem auf einem Schenkel wird.

239. (238.) Die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks sind

$$2x - 3y + 16\tfrac{1}{2} = 0,\ 15x + 8y - 1 = 0,\ 7x - 24y - 9 = 0.$$

Es sollen die Koordinaten eines Punktes auf der ersten Seite gefunden werden, der von den beiden andern Seiten gleichweit entfernt ist.

240. (239.) Die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks sind

$$y = 0,\ 3y - 4x = 0,\ y + \tfrac{3}{2}x - 5 = 0.$$

Zu der ersten ist eine Parallele zu ziehen, so daß diese letztere gleich dem unteren Abschnitte der zweiten Seite ist.

241. (240.) Die Koordinaten der Fußpunkte der Höhen eines Dreiecks sind

$$x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ x_2 = 7\tfrac{4}{17},\ y_2 = 3\tfrac{1}{17},\ x_3 = 3\tfrac{12}{17},\ y_3 = 4\tfrac{14}{17}.$$

Welches sind die Gleichungen der Höhen? Welches die Gleichungen der Seiten des Dreiecks?

242. (241.) Von dem Dreieck ABC falle die Seite AB mit der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, der Punkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Man ziehe den Radius des umschriebenen Kreises durch A und verbinde die Fußpunkte der Höhen auf AC und AB. Unter welchem Winkel schneiden sich diese beiden Linien?

243. (242.) Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks. Es sollen die Gleichungen der Seiten eines Sechsecks gefunden

werden, welches von den in den Eckpunkten auf den Seiten errichteten Loten gebildet wird.

244. (243.) Die Gleichungen der Seiten eines Rhombus sind

$$3y - 8x + 9 = 0,\ 3y + 8x - 87 = 0,\ 3y - 8x + 57 = 0,$$
$$3y + 8x - 39 = 0.$$

Es sollen die Koordinaten desjenigen Punktes, der gleichweit von den Seiten desselben entfernt ist, und der Abstand selbst gefunden werden.

245. (244.) Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind

$$5y - 2x - 11 = 0,\ y + 4x - 33 = 0,\ 10y + x + 21 = 0,$$
$$3y - 5x + 1 = 0.$$

Man verbinde die Halbierungspunkte der Seiten und halbiere die Winkel des so entstandenen Vierecks. Welches sind die Gleichungen der Halbierungslinien?

Gleichungen höheren Grades, welchen Systeme von geraden Linien entsprechen.

246. (245.) Wie läßt sich nachweisen, daß der homogenen Gleichung n-ten Grades zwischen x und y

$$x^n - ax^{n-1}y + bx^{n-2}y^2 - \cdots \mp pxy^{n-1} \pm qy^n = 0$$

n gerade Linien entsprechen, welche durch den Koordinatenanfangspunkt gehen?

247. Welcher Bedingung müssen die Konstanten der allgemeinen Gleichung n-ten Grades zwischen x und y genügen, damit ihr lauter gerade Linien entsprechen, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen?

248. (246.) Wie liegen die geraden Linien, welche der Gleichung

$$y^2 - ayx + bx^2 = 0$$

entsprechen?

249. (247.) Welche geraden Linien werden a) durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$, b) durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ dargestellt?

250. (248.) Es sollen die geraden Linien gefunden werden, deren Gleichung $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$ ist.

251. (249.) Welche geraden Linien entsprechen der Gleichung

$$y^2 - 2yx + 3x^2 = 0?$$

252. (250.) Welches ist die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$2y^3 - 11y^2x + 4yx^2 + 5x^3 = 0?$$

253. (251.) In welchen Punkten wird die Gerade $3x + 4y - 5 = 0$ von den Geraden geschnitten, welche der Gleichung

$$3y^3 - 22y^2x + 5yx^2 + 14x^3 = 0$$

entsprechen?

254. (252.) Es sollen die Geraden bestimmt werden, welche der Gleichung

$$6y^4 + 7y^3x - 36y^2x^2 - 7yx^3 + 6x^4 = 0$$

entsprechen. In welcher gegenseitigen Lage befinden sich dieselben?

255. (253.) Durch den Punkt $(x_1 = 7,\ y_1 = -9)$ sollen Parallelen zu den Geraden gezogen werden, welche der Gleichung

$$15x^2 + 49xy - 22y^2 = 0$$

entsprechen. Welches sind die Gleichungen derselben?

256. (254.) Von dem Punkte $(x_1 = 3,\ y_1 = 4)$ sollen auf die Geraden, welche die Gleichung $6y^2 - 17xy + 5x^2 = 0$ darstellt, Lote gefällt werden. Wie lang sind dieselben? Wie groß ist der Inhalt des Vierecks, welches von den gegebenen Geraden und den Loten eingeschlossen wird?

257. (255.) Welches ist die Tangente des Winkels, den die Geraden, welche der Gleichung $Ly^2 + Mxy + Nx^2 = 0$ entsprechen, einschließen? Welche Relation besteht zwischen den Konstanten der Gleichung, wenn die beiden Geraden aufeinander lotrecht stehen?

258. (256.) Durch die Gleichung $3y^2 + 13xy - 10x^2 = 0$ werden zwei Gerade dargestellt. Wie groß ist der Winkel, den beide einschließen?

259. (257.) Bestimme den Winkel, unter dem sich die Geraden schneiden, welche der Gleichung $4y^2 - 15xy - 4x^2 = 0$ entsprechen.

260. (258.) Gegeben ist die Gleichung zweier Geraden

$$Ly^2 + Mxy + Nx^2 = 0.$$

Es sollen die Gleichungen derjenigen beiden Geraden bestimmt werden, welche die Winkel der gegebenen Geraden halbieren.

261. (259.) Gegeben ist die Gleichung $3y^2 + 13xy - 10x^2 = 0$, der zwei gerade Linien entsprechen. Welches sind die Gleichungen der Winkelhalbierenden?

262. (260.) Gegeben ist die Gleichung $y^2 - 2yx + 3x^2 = 0$. Es sollen die Gleichungen derjenigen Geraden bestimmt werden, welche die Winkel der beiden Geraden, die der gegebenen Gleichung entsprechen, halbieren.

263. (261.) Die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks liege im Koordinatenanfangspunkte, seine Schenkel mögen der Gleichung

$$10y^2 - 41xy + 21x^2 = 0$$

entsprechen. Welche Richtung kann die Grundlinie desselben haben?

264. (262.) Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

genügen, wenn derselben zwei gerade Linien entsprechen sollen?

265. (263.) Entsprechen der Gleichung

$$2y^2 - xy - 15x^2 - 13y - 27x + 6 = 0$$

zwei gerade Linien? Welches sind die Gleichungen derselben?

266. (264.) Entsprechen der Gleichung

$$28x^2 + xy - 2y^2 - 11x - y + 1 = 0$$

zwei gerade Linien? Welches sind die Gleichungen derselben?

267. (265.) Welchen Wert muß man der unbekannten Konstanten B in der Relation

$$y^2 + Bxy + 2x^2 + y + x - 6 = 0$$

erteilen, damit dieser Gleichung zwei gerade Linien entsprechen?

268. Der Schnittpunkt der beiden Geraden, die der Gleichung

$$12x^2 - 23xy + 10y^2 - 3x + 9y - 9 = 0$$

entsprechen, sei mit dem Punkte $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ verbunden Welches ist die Gleichung der Verbindungslinie?

269. (266.) Von dem Schnittpunkte der beiden Geraden, welche der Gleichung

$$3x^2 + 4xy - 4y^2 - 26x + 4y + 35 = 0$$

entsprechen, sei ein Lot auf die Gerade $7x - 9y - 63 = 0$ gefällt. Welches ist die Gleichung desselben?

270. Die Schnittpunkte der Geradenpaare

$$3x^2 - 2xy - 8y^2 - 8x + 36y - 28 = 0 \text{ und}$$
$$20x^2 + xy - y^2 - 43x + 5y + 14 = 0$$

werden miteinander durch eine Gerade verbunden. Die Gleichung derselben ist zu bestimmen.

271. Welchen Bedingungen müssen die Konstanten der Gleichungen

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \text{ und}$$
$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

genügen, wenn die Gleichungen zwei Geradenpaare darstellen sollen, von denen das eine dem andern parallel ist?

272. (267.) Wieviel Bedingungsgleichungen müssen die Konstanten der Gleichung dritten Grades

$$Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + 1 = 0$$

Genüge leisten, wenn dieselbe drei gerade Linien repräsentieren soll?

273. (268.) Werden durch die Gleichung

$$8y^3 - 18y^2x + 7yx^2 + 3x^3 + 10y^2 - 8yx - 7x^2 + y + 5x - 1 = 0$$

gerade Linien dargestellt? Welches sind die Gleichungen derselben?

274. Welchen Bedingungen müssen die Konstanten der Gleichung

$$Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + J = 0$$

genügen, damit dieselbe drei Gerade darstellt, die durch einen Punkt gehen?

275. (269.) Wieviel Bedingungsgleichungen müssen die Konstanten der Gleichung

$$y^4 + Ay^3x + By^2x^2 + Cyx^3 + Dx^4 + Fy^3 + Gy^2x + Hyx^2$$
$$+ Kx^3 + Ly^2 + Myx + Nx^2 + Py + Qx + R = 0$$

genügen, wenn dieselbe vier parallele Gerade repräsentieren soll?

Das Strahlenbüschel. (Abgekürzte Bezeichnung.)

276. (270.) Welches ist die geometrische Bedeutung der Größe k in der Gleichung

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 - k\,(x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2) = 0?$$

277. (271.) Welches ist die geometrische Bedeutung der Größe k in der Gleichung

$$L_1x + M_1y + N_1 - k\,(L_2x + M_2y + N_2) = 0?$$

Anmerkung. In den folgenden Aufgaben ist die Gleichung $x\cos\varphi_n + y\sin\varphi_n - p_n = 0$ kurz durch $V_n{}^* = 0$ bezeichnet. Erteilt man k in der Gleichung $V_1 - kV_2 = 0$ alle möglichen positiven

* $V_n = 0$ bedeutet also die Normalform der Gleichung einer Geraden.

und negativen reellen Werte, so entspricht der Gleichung ein Strahlenbüschel, d. i. ein System von Geraden, welche alle durch den Schnittpunkt der Fundamentalgeraden $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ gehen. Die Größe k wird der Parameter des Büschels, der Schnittpunkt der Fundamentalgeraden das Zentrum des Büschels genannt.

278. (272.) Gegeben sind die beiden Geraden $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, welche den Winkel α einschließen. Im Schnittpunkte ist auf jeder dieser beiden Geraden ein Lot errichtet. Welches sind die Gleichungen der Lote?

279. (273.) Die Gleichungen zweier Geraden sind $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. In welcher Beziehung stehen die beiden Geraden $V_1 - kV_2 = 0$ und $V_1 + kV_2 = 0$ zu den Fundamentallinien?

280. (274.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Geraden $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. Was läßt sich über die Lage der beiden Geraden bestimmen, deren Gleichungen $V_1 - kV_2 = 0$ und $kV_1 - V_2 = 0$ sind?

Anmerkung. In den folgenden Aufgaben (281—288) soll der Koordinatenanfangspunkt stets als innerhalb des Dreiecks liegend angenommen werden.

281. (275.) $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ sind die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks, α_1, α_2, α_3 die V_1, V_2, V_3 bezüglich gegenüberliegenden Winkel desselben. Welches sind die Gleichungen der Transversalen, welche die Eckpunkte mit den Halbierungspunkten der Gegenseiten verbinden? Wie läßt sich nachweisen, daß diese Transversalen durch einen Punkt gehen?

282. (276.) Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ und den Winkeln α_1, α_2, α_3 sind die Gleichungen der Höhen zu ermitteln. Ferner ist zu zeigen, daß sich die Höhen in einem Punkte schneiden.

283. Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ sind die Gleichungen der durch die Ecken des Dreiecks zu den gegenüberliegenden Seiten gezogenen Parallelen abzuleiten.

284. (277.) In einem Dreieck, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind die Innenwinkel und die Außenwinkel halbiert. Welches sind die Gleichungen der Halbierungslinien? Was läßt sich über die gegenseitige Lage dieser Halbierungslinien bestimmen?

285. (278.) Von den Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind Transversalen nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise gezogen.

Welches sind die Gleichungen derselben? Wie läßt sich nachweisen, daß sich dieselben in einem Punkte schneiden?

286. (279.) Es ist zu zeigen, daß die Ecktransversalen eines Dreiecks, nach den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises gezogen, sich in einem Punkte schneiden. Die Gleichungen der Seiten des Dreiecks sind $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$.

287. Die Seiten eines Dreiecks haben die Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$. Welches sind die Gleichungen der Transversalen nach den Berührungspunkten des an die Seite $V_3 = 0$ angeschriebenen Kreises? Welche Lage haben dieselben zueinander?

288. (280.) Die Gleichungen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, die der Hypotenuse $V_3 = 0$, die spitzen Winkel α_1 und α_2. Wie läßt sich nachweisen, daß die Hilfslinien des Euklidischen Beweises zum Lehrsatz des Pythagoras sich mit der Höhe des Dreiecks in einem Punkte schneiden?

289. (281.) Gegeben ist die Gleichung eines Strahlenbüschels

$$2x + 5y - 8 + k(3x - 4y - 8) = 0.$$

Für welchen Wert des Parameters k erhält man aus dieser Gleichung die Gleichung des Strahles

$$11x - 7y - 32 = 0,$$

welcher dem Büschel angehört?

290. Gegeben sind die Gleichungen zweier Strahlenbüschel

$$3x - 2y + 4 + k(2x + y - 9) = 0 \text{ und}$$
$$x - y + 1 + f(4x - 5y + 8) = 0.$$

Welches ist die Gleichung des Strahles, der beiden Büscheln gemeinsam ist? Für welche Werte der Parameter k und f erhält man die Gleichung desselben?

291. Welches ist die Gleichung eines Strahlenbüschels, dessen Zentrum in unendlicher Ferne liegt?

292. Gegeben sind die Gleichungen zweier Parallelstrahlenbüschel

$$L_1x + M_1y + N_1 + k(L_1x + M_1y + N_1') = 0,$$
$$L_2x + M_2y + N_2 + f(L_2x + M_2y + N_2') = 0.$$

Welches ist die Gleichung des Strahles, der beiden Büscheln gemeinsam ist?

293. (282.) Gegeben ist die Gleichung eines Strahlenbüschels $V_1 + kV_2 = 0$. In dem Büschel mögen die beiden Strahlen,

deren Gleichungen $V_1 + k_1 V_2 = 0$, $V_1 + k_2 V_2 = 0$ sind, als Fundamentalstrahlen betrachtet werden. Welcher Wert ist dann dem Parameter h in der Gleichung $V_1 + k_1 V_2 + h(V_1 + k_2 V_2) = 0$ zu erteilen, damit dieselbe gleichbedeutend sei mit der Gleichung eines bestimmten Strahles $V_1 + r V_2 = 0$?

294. (283.) Gegeben ist ein Strahlenbüschel, dessen Gleichung

$$5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1) = 0$$

ist. Die beiden Geraden $7x - 4y + 2 = 0$, $19x + 14y - 4 = 0$ mögen als Fundamentalstrahlen desselben angesehen werden. Wie entwickelt man dann mit Hilfe derselben die Gleichung der Geraden $3x - 10y + 4 = 0$?

Das Doppelverhältnis von vier Strahlen.

Erklärung. Die allgemeine Gleichung einer Geraden werde kurz durch $L_n{}^* = 0$ bezeichnet. Sind

$$L_1 = 0, \quad L_1 + k_1 L_2 = 0,$$
$$L_2 = 0, \quad L_1 + k_2 L_2 = 0$$

die Gleichungen von vier Strahlen eines Büschels und werden die Strahlen, welche je zwei untereinander stehenden Gleichungen entsprechen, als zugeordnete betrachtet, so wird der Quotient $\frac{k_1}{k_2}$ der Wert des Doppelverhältnisses der vier Strahlen genannt.

295. Es ist zu zeigen, daß der Wert des Doppelverhältnisses von vier Strahlen unabhängig ist von der Form, in der die Gleichungen der Geraden gegeben sind.

296. (284.) Gegeben sind drei Strahlen eines Büschels $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_1 + k L_2 = 0$. Welches muß die Gleichung eines vierten Strahles sein, der dem dritten zugeordnet ist, wenn der Wert des Doppelverhältnisses gleich f sein soll?

Beispiel. $L_1 = 11x - 2y + 7 = 0,$
$L_2 = 3x + 5y - 6 = 0,$
$L_1 + k_1 L_2 = 2x - 17y + 25 = 0,$
$f = \frac{9}{8}.$

---

* Unter $L_n = 0$ braucht also nicht die Normalform der Gleichung einer Geraden verstanden zu werden, sondern eine Gleichung der Form $Ax + By + C = 0$.

297. (285.) Von einem Büschel sind vier Strahlen gegeben:

$$L_1 \equiv y - 7x + 4 = 0,\ L_2 \equiv 3y + 2x - 5 = 0,$$

$L_1 + k_1 L_2 \quad 7y - 3x - 6 = 0,\ L_1 + k_2 L_2 \equiv 10y - x - 11 = 0.$

Welchen Wert hat das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen?

298. (286.) Von einem Strahlenbüschel sind vier Gerade gegeben:

$$L_1 + k_1 L_2 = 0, \qquad L_1 + h_1 L_2 = 0,$$
$$L_1 + k_2 L_2 = 0, \qquad L_1 + h_2 L_2 = 0.$$

Welchen Wert hat das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen? Zugeordnet sind die Strahlen, welche je zwei untereinander stehenden Gleichungen entsprechen.

299. (287.) Die Gleichung eines Strahlenbüschels ist

$$5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1) = 0.$$

Welchen Wert hat das Doppelverhältnis von vier Strahlen dieses Büschels, deren Gleichungen

$$\begin{cases} 11x + 2y = 0, \\ x - 13y + 5 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 4y + 2 = 0, \\ 15x + 8y - 2 = 0 \end{cases}$$

sind?

300. (288.) Es ist zu zeigen, daß der Wert des Doppelverhältnisses $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ unverändert bleibt, wenn man bei gleichbleibender zyklischer Folge mit dem dritten Gliede beginnt, oder bei umgekehrter zyklischer Folge das zweite oder vierte Glied an die Spitze stellt. Welcher Satz folgt daraus für die Strahlen des Büschels?

301. (289.) Welchen Wert nimmt das Doppelverhältnis von vier Strahlen $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ an, wenn man die Strahlen eines einzigen Paares miteinander vertauscht?

302. (290.) Welchen Wert nimmt das Doppelverhältnis von vier Strahlen $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ an, wenn man den ersten Strahl des einen Paares mit dem zweiten des andern Paares vertauscht?

303. (291.) Der Wert des Doppelverhältnisses von vier Strahlen $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$ ist gleich f. Welchen Wert nimmt dasselbe an, wenn die ersten Strahlen der beiden Paare, oder wenn die zweiten Strahlen beider Paare miteinander vertauscht werden?

304. (292.) Permutiert man die Glieder des Symbols $(k_1 k_2;\ h_1 h_2)$, so ergeben sich 24 verschiedene Formen. Wie viele verschiedene Werte können indessen die Doppelverhältnisse von vier Strahlen nur besitzen?

305. (293.) Wie viele Werte der Doppelverhältnisse von vier Strahlen werden positiv, wie viele negativ sein?

Harmonische Strahlenbüschel.

Erklärung. Hat das Doppelverhältnis von vier durch einen Punkt gehenden Geraden den Wert -1, so wird das Büschel ein harmonisches genannt.

306. (294.) Es ist zu zeigen, daß die Schenkel eines Winkels $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ mit der Halbierungslinie desselben und der des Nebenwinkels ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

307. (295.) Wie läßt sich nachweisen, daß die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels im Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises und im Mittelpunkte des der Gegenseite anbeschriebenen Kreises harmonisch geteilt wird?

308. (296.) Wie läßt sich zeigen, daß je zwei Seiten eines Fußpunktendreiecks mit der Seite und der Höhe, welche durch ihren Schnittpunkt gehen, ein harmonisches Büschel bilden?

309. (297.) Welche Bedingungsgleichung muß erfüllt sein, wenn die vier Strahlen

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

ein harmonisches Büschel bilden sollen?

310. (298.) Wie gestaltet sich das Büschel in der vorhergehenden Aufgabe, wenn $h_1 = k_1$ gesetzt wird?

311. (299.) Gegeben sind zwei Geradenpaare

$$\begin{cases} 3y + 4x - 25 = 0, \\ 2y - 3x - 11 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7y - 2x - 47 = 0, \\ -y + 10x - 3 = 0. \end{cases}$$

Es soll untersucht werden, ob dieselben ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

312. (300.) Es sind die Gleichungen von drei Geraden gegeben, die sich in einem Punkte schneiden, nämlich

$$L_1 - kL_2 = 0, \quad L_1 + kL_2 = 0, \quad L_1 - hL_2 = 0.$$

Welches ist die der letzten Geraden konjugierte Harmonikale?

313. (301.) Die Gleichungen von drei Geraden, welche durch einen Punkt gehen, sind

$$L_1 + k_1 L_2 = 0, \quad L_1 + k_2 L_2 = 0, \quad L_1 + k_3 L_2 = 0.$$

Es ist die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, welche mit diesen gegebenen Geraden ein harmonisches Büschel bildet.

314. (302.) Welche geraden Linien bilden mit den drei Geraden

$$2x + 5y - 8 = 0, \quad 5x + y - 16 = 0, \quad 3x - 4y - 8 = 0,$$

die durch einen Punkt gehen, je ein harmonisches Strahlenbüschel?

315. (303.) Die Gleichungen der Fundamentallinien eines Büschels sind $2x + 3y - 5 = 0$, $7x - 2y + 1 = 0$. Drei Strahlen, welche zu diesem Büschel gehören, entsprechen den Gleichungen

$$-33x + 13y - 10 = 0, \quad 23x - 3y - 2 = 0, \quad 9x + y - 4 = 0.$$

Welches sind die Gleichungen der Geraden, die mit diesen gegebenen Strahlen harmonische Büschel bilden?

316. (304.) In einem Dreieck, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind die Schwerpunktstransversalen konstruiert. Es ist zu jeder derselben die zugeordnete Harmonikale zu bestimmen, wenn die beiden Seiten, durch deren Schnittpunkt sie geht, als konjugierte Strahlen betrachtet werden. Ferner sollen die Gleichungen der Geraden gefunden werden, welche mit den drei Schwerpunktstransversalen harmonische Strahlenbüschel bilden.

317. Es ist zu zeigen, daß die von einer Ecke eines Dreiecks ausgehende Höhe, Winkelhalbierende und die beiden Transversalen nach den Berührungspunkten des ein- und des der gegenüberliegenden Seite angeschriebenen Kreises ein harmonisches Büschel bilden.

318. Dasselbe ist zu zeigen von der Höhe, der Halbierungslinie des an derselben Ecke liegenden Außenwinkels und den Transversalen nach den Berührungspunkten derjenigen angeschriebenen Kreise, durch deren Mittelpunkte die genannte Halbierungslinie geht.

319. (305.) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$. Welches sind die Gleichungen der geraden Linien, welche mit den Höhen des Dreiecks harmonische Strahlenbüschel bilden?

320. (306.) Von den Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten den Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ entsprechen, sind Transversalen nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise gezogen. Welche geraden Linien bilden mit diesen drei Transversalen harmonische Strahlenbüschel?

321. Gegeben ist die Gleichung eines Parallelstrahlenbüschels

$$L_1 x + M_1 y + N_1 + k(L_1 x + M_1 y + N_1') = 0.$$

Welches ist die Gleichung desjenigen Strahles, der der unendlich fernen Geraden bezüglich der Fundamentalstrahlen des Büschels harmonisch zugeordnet ist?

322. (307.) Gegeben ist ein Strahlenpaar, welches den Gleichungen

$$L_1 + k_1 L_2 = 0, \quad L_1 + k_2 L_2 = 0$$

entspricht. Wie viele Strahlenpaare lassen sich konstruieren, von denen jedes mit dem gegebenen ein harmonisches Strahlenbüschel bildet?

323. (308.) Zwei Strahlenpaare sind durch ihre Gleichungen

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + r_1 L_2 = 0, \\ L_1 + r_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Es soll ein Strahlenpaar gefunden werden, welches mit jedem der gegebenen Strahlenpaare ein harmonisches Büschel bildet.

324. (309.) Welches sind die Gleichungen des Strahlenpaares, das mit jedem der beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 2y - x - 11 = 0, \\ 2y - 3x - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} 2y + 3x - 23 = 0, \\ y + x - 10 = 0 \end{cases}$$

ein harmonisches Strahlenbüschel bildet?

325. (310.) Es sollen die Gleichungen desjenigen Strahlenpaares bestimmt werden, welches mit jedem der beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 2y + 3x - 5 = 0, \\ 7y - 11x + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -12y + 25x - 11 = 0, \\ 37y - 52x + 10 = 0 \end{cases}$$

ein harmonisches Strahlenbüschel bildet.

Involutorische Strahlenbüschel.*

Erklärung. Drei Strahlenpaare, welche durch einen Punkt gehen, bilden ein involutorisches Büschel, wenn sich ein viertes Strahlenpaar bestimmen läßt, welches jedem der gegebenen harmonisch ist.

326. (311.) Gegeben sind drei Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + h_3 L_2 = 0, \\ L_1 + h_4 L_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + h_5 L_2 = 0, \\ L_1 + h_6 L_2 = 0. \end{cases}$$

* Über projektivische und involutorische Strahlenbüschel und Punktreihen siehe außerdem Heft III, Aufg. 1—122.

Welcher Bedingungsgleichung müssen die Parameter h_1, h_2, h_3 ... genügen, wenn diese Strahlenpaare sich in Involution befinden sollen?

327. (312.) Zu dem Strahlenbüschel

$$5x - 3y + 2 + h(x + 2y - 1) = 0$$

gehören die drei Strahlenpaare

$$\begin{cases} 8x + 3y - 1 = 0, \\ 4x - 5y + 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 10x + 7y - 3 = 0, \\ 7x + y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - y + 1 = 0, \\ 8{,}5x + 4y - 1{,}5 = 0. \end{cases}$$

Es ist nachzuweisen, daß diese Strahlenpaare ein involutorisches Büschel bilden.

328. (313.) Drei Strahlenpaare, deren Gleichungen

$$\begin{cases} L_1 = 0, \\ L_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + f_1 L_2 = 0, \\ L_1 + f_2 L_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + r_1 L_2 = 0, \\ L_1 + r_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

sind, bilden eine Involution. Welcher Relation müssen dann die Parameter genügen?

329. (314.) Gegeben sind die Gleichungen von drei Strahlenpaaren, welche durch einen Punkt gehen,

$$\begin{cases} 5x + y - 11 = 0, \\ 3x - 2y + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 14x - 5y - 8 = 0, \\ 29x - 15y - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 17x - 7y - 7 = 0, \\ 23x - 11y - 5 = 0. \end{cases}$$

Bilden diese ein involutorisches Strahlenbüschel?

330. (315.) Eine Involution ist bestimmt durch die Gleichung

$$k_1 k_2 - 4(k_1 + k_2) + 7 = 0,$$

worin k_1 und k_2 Parameter zugeordneter Strahlen sind.

Es sollen die Gleichungen von drei involutorischen Strahlenpaaren entwickelt werden, wenn die Gleichung des Büschels

$$2x - 4y + 3 + k(5x + y - 1) = 0$$

ist. Es sei $k_1 = 5$, $k_1' = 3$, $k_1'' = -2$.

331. (316.) Es ist nachzuweisen, daß in einem involutorischen Strahlenbüschel einem Strahl nur ein bestimmter zweiter Strahl und umgekehrt dem letzteren Strahl nur der erste entspricht.

332. (317.) Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind zwei Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

und ein einzelner Strahl $L_1 + r_1 L_2 = 0$ gegeben. Welches ist die Gleichung desjenigen Strahles, der dem letzten Strahl entspricht?

333. (318.) Zwei Strahlenpaare eines involutorischen Büschels besitzen die Gleichungen

$$\begin{cases} 11x - 2y + 7 = 0, \\ 4x + 5y + 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 21x + 10{,}5y + 14{,}5 = 0, \\ 27x + 18y + 19 = 0. \end{cases}$$

Welcher Strahl des Büschels entspricht dann der Geraden

$$19x + 8y + 13 = 0?$$

334. (319.) Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind drei Strahlenpaare gegeben, nämlich

$$\begin{cases} 5x + y - 11 = 0, \\ 3x - 2y + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 14x - 5y - 8 = 0, \\ 29x - 15y - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 17x - 7y - 7 = 0, \\ 23x - 11y - 5 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen derjenigen beiden Strahlen, die mit jedem der gegebenen Paare ein harmonisches Büschel bilden?

Erklärung. Fallen in einem involutorischen Strahlenbüschel zwei entsprechende Strahlen zusammen, so bilden dieselben einen Doppelstrahl der Involution.

335. (320.) Wie viele Doppelstrahlen können in einem involutorischen Strahlenbüschel vorkommen? Welche Lage haben diese Doppelstrahlen zu denjenigen beiden Strahlen, die mit jedem Strahlenpaare der Involution ein harmonisches Büschel bilden?

336. (321.) Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + h_1 L_2 = 0, \\ L_1 + h_2 L_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Wie bestimmt man die Parameter der Doppelstrahlen der Involution?

337. (322.) Von dem Strahlenbüschel

$$5x - 3y + 2 + h(x + 2y - 1) = 0$$

sind zwei Strahlenpaare einer Involution gegeben, nämlich

$$\begin{cases} 8x + 3y - 1 = 0, \\ 4x - 5y + 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x + 7y - 3 = 0, \\ 7x + y = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen der Involution?

338. (323.) Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 11x - 2y + 7 = 0, \\ 4x + 5y + 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 19x + 8y + 13 = 0, \\ 31x + 23y + 22 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen der Involution?

339. (324.) Es ist nachzuweisen, daß eine Involution auch durch die beiden Doppelstrahlen bestimmt sein kann. Welche Relation besteht in diesem Falle zwischen den Parametern entsprechender Strahlen?

340. (325.) Die beiden Geraden

$$11x + 2y = 0, \quad 13x + 5y - 1 = 0,$$

welche dem Büschel

$$5x - 7y + 3 + k(2x + 3y - 1) = 0$$

angehören, mögen als Doppelstrahlen eines involutorischen Büschels angesehen werden. Welcher Strahl entspricht der geraden Linie, deren Gleichung $7x - 4y + 2 = 0$ ist?

341. (326.) Die beiden Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels mögen aufeinander lotrecht stehen. Welche Lage haben in diesem Falle je zwei entsprechende Strahlen?

342. (327.) Welche Relation besteht zwischen den Parametern entsprechender Strahlen einer Involution, wenn die beiden Doppelstrahlen zusammenfallen?

343. (328.) Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 2y - x - 11 = 0, \\ 2y - 3x - 5 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y + 3x - 23 = 0, \\ y + x - 10 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Es sollen die Gleichungen der beiden sich entsprechenden Strahlen des Büschels gefunden werden, welche aufeinander lotrecht stehen.

344. (329.) Zwei involutorische Strahlenbüschel mögen den Mittelpunkt gemein haben. Von dem einen seien die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + k_1 L_2 = 0, \\ L_1 + k_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + k_3 L_2 = 0, \\ L_1 + k_4 L_2 = 0, \end{cases}$$

von dem zweiten

$$\begin{cases} L_1 + r_1 L_2 = 0, \\ L_1 + r_2 L_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + r_3 L_2 = 0, \\ L_1 + r_4 L_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Es sollen die Gleichungen eines Strahlenpaares gefunden werden, welches sowohl mit den beiden ersten Paaren, als auch mit den beiden letzten in Involution steht.

Homogene (trimetrische) Punktkoordinaten.

345. (330.) Gegeben sind die Gleichungen von drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen,

$$x_1 \equiv x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0,$$
$$x_2 \equiv x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0,$$
$$x_3 \equiv x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = 0.$$

Es soll die Gleichung der Geraden $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$ in der Form

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$$

dargestellt werden. Welches sind die Werte der Koeffizienten A_1, A_2, A_3?

Erklärung. Mit Hilfe von drei gegebenen Geraden kann man jede gerade Linie durch die homogene Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ darstellen. In dieser bedeuten zunächst gemäß der vorigen Lösung (vgl. auch Lösung 68) x_1, x_2, x_3 die Abstände eines Punktes der Geraden von den drei gegebenen Geraden (absolute trimetrische Koordinaten), die Koeffizienten die in Lösung 345 angegebenen Werte. Da indessen die Gleichung sowohl bezüglich der Größen x_1, x_2, x_3, als auch bezüglich der Größen a_1, a_2, a_3 homogen ist, können unbeschadet der Richtigkeit der Gleichung gemeinsame Faktoren der Größen a bzw. x fortgelassen werden. Dann sind die Größen x den Abständen eines Punktes von den drei gegebenen Geraden proportional (relative trimetrische Koordinaten), die Größen a den in Lösung 345 genannten Werten. Die drei gegebenen Geraden werden die Fundamentallinien, das von ihnen gebildete Dreieck das Fundamentaldreieck genannt. Im folgenden soll der Koordinatenanfangspunkt stets als innerhalb des Fundamentaldreiecks liegend vorausgesetzt werden, so daß alle Punkte innerhalb des Fundamentaldreiecks nur positive Koordinaten (x_1, x_2, x_3) haben.

346. (331.) Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten a_1, a_2, a_3 in der Gleichung der geraden Linie

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0?$$

347. (332.) Die Gleichungen der drei Fundamentallinien sind

$$X_1 \equiv 5x - 2y + 1 = 0,$$
$$Y_1 \equiv 2x - y - 3 = 0,$$
$$Z_1 \equiv x + y + 1 = 0.$$

Welches ist die Gleichung der Geraden $x + 2y - 4 = 0$ in homogenen Koordinaten?

348. (333.) Die Gleichungen der drei Fundamentallinien sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Von dem Punkte P werden auf dieselben drei Lote x_1', x_2', x_3' gefällt. Welche Relation läßt sich für dieselben aufstellen?

349. Die Abstände eines Punktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks verhalten sich wie $a : b : c$ (relative Koordinaten). Wie groß sind die wirklichen Abstände (absolute Koordinaten) x_1, x_2, x_3?

350. (336.) Die Lage des Durchschnittspunktes der beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

ist zu finden.

351. (335.) Gegeben ist die Gleichung einer Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Wie lassen sich die Schnittpunkte derselben mit den Seiten des Fundamentaldreiecks bestimmen?

352. (337.) Die Lage der beiden Punkte A und B ist durch die (relativen) Koordinaten

$$x_1', x_2', x_3' \quad \text{und} \quad x_1'', x_2'', x_3''$$

bestimmt. Welches ist die Gleichung der Geraden, die durch diese beiden Punkte hindurchgeht?

353. Welches ist die Bedingung dafür, daß drei Punkte, deren Koordinaten x_1', x_2', x_3', bzw. x_1'', x_2'', x_3'', bzw. x_1''', x_2''', x_3''' sind, in gerader Linie liegen?

354. (338.) Welches ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

geht?

355. (339.) Es soll die Gleichung derjenigen Geraden bestimmt werden, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

und durch den Punkt (x_1', x_2', x_3') hindurchgeht.

356. (340.) Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die drei Geraden

$$a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0,$$
$$a_1'\ x_1 + a_2'\ x_2 + a_3'\ x_3 = 0,$$
$$a_1''\ x_1 + a_2''\ x_2 + a_3''\ x_3 = 0$$

durch einen Punkt gehen sollen?

357. (341.) Welches ist die Gleichung derjenigen Geraden, die durch den Schnittpunkt der Geraden

$$a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0,$$
$$a_1'\ x_1 + a_2'\ x_2 + a_3'\ x_3 = 0$$

und durch den der Geraden

$$b_1\ x_1 + b_2\ x_2 + b_3\ x_3 = 0,$$
$$b_1'\ x_1 + b_2'\ x_2 + b_3'\ x_3 = 0$$

hindurchgeht?

358. (342.) Welches sind die Gleichungen der Ecktransversalen des Fundamentaldreiecks, die durch den Punkt A gehen, wenn die Koordinaten von A x_1', x_2', x_3' sind?

359. (343.) Die Gleichungen der Seiten des Fundamentaldreiecks sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Man verbinde die Punkte, in denen die beiden ersten Seiten von der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ geschnitten werden, mit den beiden Eckpunkten auf der dritten Seite. Welches sind die Gleichungen der Verbindungslinien? Durch welche Relationen ist die Lage des Schnittpunktes derselben bestimmt?

360. (344.) Die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $a_1'x_1 + a_3'x_3 = 0$ bilden ein vollständiges Vierseit. Welches sind die Gleichungen der Diagonalen? In welchen Punkten schneiden sich dieselben?

361. Es ist zu zeigen, daß die Halbierungspunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits in gerader Linie liegen.

362. (345.) Verbindet man den Punkt A in der Fläche des Fundamentaldreiecks, dessen Lage durch die Koordinaten x_1', x_2', x_3' bestimmt ist, mit den Ecken, so erhält man ein vollständiges Vierseit und zwei Diagonalen desselben. Es sollen die drei Paare gegenüberliegender Ecken des Vierseits bestimmt werden.

363. Ein beliebiger Punkt (x_1', x_2', x_3') sei mit den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits verbunden. Es ist nachzuweisen, daß diese Verbindungslinien ein involutorisches Strahlenbüschel bilden.

364. Durch die Punkte A und B des Fundamentaldreiecks ABC sind bezüglich der Geraden $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, bzw. $x_1 = 0$ und

$x_3 = 0$ je zwei harmonische Strahlen L_1 und L_1' bzw. L_2 und L_2' gezogen. Welche Lage haben die vier Schnittpunkte der Strahlen?

365. Ein beliebiger Punkt P sei mit den drei Diagonalpunkten eines vollständigen Vierecks verbunden und zu jeder Verbindungslinie bezüglich der in dem Diagonalpunkt sich schneidenden Seiten des Vierecks der vierte harmonische Strahl gezogen. Es ist zu zeigen, daß die vierten harmonischen Strahlen ebenfalls durch einen Punkt gehen.

366. Es ist nachzuweisen, daß in jedem vollständigen Viereck die Seiten des Diagonalpunktdreiecks mit den Seiten des Vierecks drei harmonische Strahlenbüschel bilden.

367. (347.) Die Gleichungen der Seiten des Fundamentaldreiecks sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Wie läßt sich die Lage der Geraden bestimmen, welche der Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ entspricht?

368. Es sind die Längen der Lote zu berechnen, die sich von den Ecken des Fundamentaldreiecks auf die Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ fällen lassen.

369. Gegeben ist die Gleichung einer Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. Mit welcher Größe λ muß man diese Gleichung multiplizieren, damit die Koeffizienten λa_1, λa_2, λa_3 gleich den in Aufgabe 345 berechneten ursprünglichen Koeffizienten A_1, A_2, A_3 werden (Herstellung der Normalform)?

370. (348.) Welche Beziehung findet zwischen den Gleichungen zweier Geraden L_1 und L_2 statt, wenn dieselben einander parallel sind?

371. (349.) In dem Abstande d sind zu der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

Parallelen zu ziehen. Welches sind die Gleichungen derselben?

372. (354.) Es soll der Winkel bestimmt werden, welchen die beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

miteinander einschließen.

373. Welches ist die Bedingung dafür, daß zwei Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und $a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$ parallel sind?

374. (334.) Welche Bedeutung haben die homogenen Gleichungen

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$$

und

$$x_1 \sin \alpha_1 + x_2 \sin \alpha_2 + x_3 \sin \alpha_3 = 0,$$

wenn l_1, l_2, l_3 die Längen der Seiten und α_1, α_2, α_3 die Winkel des Fundamentaldreiecks sind?

375. (350.) Zu der Geraden $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ soll durch den Punkt, dessen Koordinaten x_1', x_2', x_3' sind, eine Parallele gezogen werden. Welches ist die Gleichung derselben?

376. (351.) Durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks mögen Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen sein. Welches sind die Gleichungen derselben?

377. (352.) Es sollen die Gleichungen der Schwerpunktstransversalen des Fundamentaldreiecks und die Koordinaten des Schwerpunktes bestimmt werden.

378. (353.) Es ist zu zeigen, daß die Verbindungslinien der Halbierungspunkte je zweier Seiten des Fundamentaldreiecks der dritten Seite parallel laufen.

379. (355.) Welche Bedingungsgleichung muß erfüllt sein, wenn die beiden Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

sich rechtwinklig durchschneiden sollen?

380. (356.) Von dem Punkte P, dessen Koordinaten x_1', x_2', x_3' sind, ist ein Lot auf die Gerade

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

gefällt. Welches ist die Gleichung desselben?

381. (357.) In dem Fundamentaldreieck mögen die Höhen konstruiert sein. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten des Schnittpunktes derselben?

382. (358.) Die Fußpunkte der Höhen des Fundamentaldreiecks mögen durch gerade Linien verbunden sein. Welches sind die Gleichungen der Verbindungslinien?

383. (359.) Jede Seite des Fußpunktendreiecks sei bis zum Schnitt mit der gegenüberliegenden Dreieckseite verlängert. Es ist zu zeigen, daß die drei Schnittpunkte in einer geraden Linie liegen.

384. Von dem Fußpunkte einer Höhe des Fundamentaldreiecks seien Lote auf die benachbarten Seiten und die andern Höhen gefällt. Wie liegen die Fußpunkte dieser vier Lote?

385. (360.) In den Halbierungspunkten der Seiten des Fundamentaldreiecks sind Lote errichtet. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten des Punktes, in dem sich diese Lote durchschneiden?

386. Es ist zu zeigen, daß der Schnittpunkt der Mittellote, der der Höhen und der Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks in gerader Linie liegen.

387. Es ist zu zeigen, daß sich die Lote, welche man von den Ecken des Fundamentaldreiecks auf die entsprechenden Seiten des Fußpunktendreiecks fällen kann, in einem Punkte schneiden.

388. Ein beliebiger Punkt P (x_1', x_2', x_3') sei mit den Ecken des Fundamentaldreiecks verbunden und auf den Verbindungslinien seien Lote in P errichtet und bis zu den Schnittpunkten mit den Gegenseiten des Fundamentaldreiecks verlängert. Es ist zu zeigen, daß die letzteren in gerader Linie liegen.*

389. Von den Ecken des Fundamentaldreiecks sind Lote auf die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ gefällt und von den Fußpunkten dieser Lote wiederum Lote auf die entsprechenden gegenüberliegenden Seiten. Es ist zu zeigen, daß die drei letzteren Lote durch einen Punkt gehen.

390. (361.) Wie groß ist der Abstand des Punktes P, dessen Koordinaten x_1', x_2', x_3' sind, von der Geraden

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0?$$

391. Es sind die Gleichungen der Winkelhalbierenden von zwei beliebigen Geraden aufzustellen.

392. Es ist zu zeigen, daß die Halbierungslinien der Winkel und Außenwinkel des Fußpunktendreiecks mit den Höhen bzw. Seiten des ursprünglichen (Fundamental-)dreiecks identisch sind.

393. Es ist zu zeigen, daß die Punkte, in denen zwei Winkelhalbierende des Fundamentaldreiecks und die Halbierungslinie des dritten Außenwinkels die gegenüberliegenden Seiten schneiden, in gerader Linie liegen.

394. (362.) Es sind die Gleichungen der Ecktransversalen zu bestimmen, welche sich in dem Fundamentaldreieck nach den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises ziehen lassen.

395. (363.) Welches sind die Gleichungen der Ecktransversalen des Fundamentaldreiecks, welche sich nach den Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise ziehen lassen?

396. Es ist zu zeigen, daß der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, der Schwerpunkt und der fünfte merkwürdige Punkt des Fundamentaldreiecks in gerader Linie liegen.

---

* Entnommen aus der Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht. 34. Jahrgang.

397. Welches ist die Entfernung zweier Punkte P' und P'', deren trimetrische Koordinaten x_1', x_2', x_3' bzw. x_1'', x_2'', x_3'' sind?

398. Die Entfernung der Mittelpunkte des umgeschriebenen und des eingeschriebenen Kreises des Fundamentaldreiecks sind zu bestimmen.

399. Es ist die Strecke zwischen den Mittelpunkten des umbeschriebenen und des an die Seite $x_1 = 0$ angeschriebenen Kreises zu berechnen.

400. Es soll der Inhalt eines beliebigen Dreiecks bestimmt werden, von dem die trimetrischen Koordinaten der Eckpunkte gegeben sind.

401. Zu bestimmen ist der Inhalt des zum Fundamentaldreieck gehörigen Fußpunktendreiecks.

402. Der Inhalt desjenigen Dreiecks ist zu berechnen, dessen Ecken die Mittelpunkte der dem Fundamentaldreieck angeschriebenen Kreise sind.

403. Ein beliebiges Dreieck $A_1B_1C_1$ möge zum Fundamentaldreieck ABC eine solche Lage haben, daß die Schnittpunkte entsprechender Seiten in einer Geraden liegen. Wie liegen die Verbindungslinien entsprechender Ecken beider Dreiecke?

404. Ein Punkt $P(x_1', x_2', x_3')$ sei mit den Ecken des Fundamentaldreiecks verbunden und zu jeder Verbindungslinie bezüglich der beiden in der Ecke zusammenstoßenden Dreieckseiten der zugeordnete harmonische Strahl konstruiert. Wie liegen die Schnittpunkte dieser Strahlen mit den gegenüberliegenden Seiten?

Der Punkt.

Die Gleichung des Punktes (Linienkoordinaten).

Erklärung. Setzt man in der (auch für schiefwinklige Koordinaten gültigen) Gleichung $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$ einer Geraden die Werte $-\frac{1}{p} = u$ und $-\frac{1}{q} = v$, so sind u und v die negativ reziproken Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinatenachsen abschneidet, und durch deren Größe die Lage der Geraden völlig bestimmt ist. Solange u und v als konstant, x und y als veränderlich angesehen werden, entsprechen der Gleichung $xu + yv + 1 = 0$ alle Punkte auf der Geraden. Sieht man dagegen x und y als konstant, u und v als variabel an, so entsprechen der Gleichung

alle geraden Linien, die durch den Punkt (x, y) hindurchgehen. Man nennt u und v die Koordinaten einer Geraden (Linienkoordinaten), $xu + yv + 1 = 0$ die Gleichung des Punktes (x, y) in Linienkoordinaten. Jede Gleichung ersten Grades zwischen u und v

$$Au + Bv + C = 0$$

gehört einem Punkte an, da sie sich leicht auf die Normalform $au + bv + 1 = 0$ reduzieren läßt.

405. (364.) Wie lautet die Gleichung eines Punktes, dessen Koordinaten a, b sind?

406. (365.) Welches ist die Gleichung eines Punktes, der auf dem positiven Teile der X-Achse in der Entfernung a vom Koordinatenanfangspunkte liegt?

407. (366.) Es soll die Gleichung eines Punktes aufgestellt werden, der auf dem negativen Teile der Y-Achse in der Entfernung b vom Koordinatenanfangspunkte liegt.

408. Welches sind die Linienkoordinaten der Geraden, deren Gleichung in Punktkoordinaten $Lx + My + N = 0$ ist?

409. Welche Richtung hat die Gerade, deren Linienkoordinaten u_1 und v_1 sind?

410. (367.) Welche Bedeutung hat die Gleichung $a_1u + b_1v = 0$?

411. (368.) Welches sind die Linienkoordinaten der Geraden, welche die beiden Punkte, deren Gleichungen

$$A_1 \equiv a_1u + b_1v + 1 = 0,$$
$$A_2 \equiv a_2u + b_2v + 1 = 0$$

sind, verbindet?

Beispiel. $A_1 \equiv 3u + 5v + 1 = 0,$
$A_2 \equiv 7u - 2v + 1 = 0.$

412. Welches ist die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden, deren Linienkoordinaten u_1, v_1 und u_2, v_2 sind?

413. (369.) Die Gleichungen der Eckpunkte eines Dreiecks sind

$$3u + 5v + 1 = 0, \quad 7u + 2v + 1 = 0, \quad 6u + 9v + 1 = 0.$$

Welches sind die Koordinaten der Seiten des Dreiecks?

414. (370.) Die Gleichungen der Eckpunkte eines vollständigen Vierecks sind

$$-2u + 5v + 1 = 0, \quad 2u + 7v + 1 = 0, \quad 3u - v + 1 = 0,$$
$$-3u - 4v + 1 = 0.$$

Welches sind die Koordinaten der Seiten? Welches sind die Gleichungen der Diagonalpunkte?

415. (371.) Wie groß ist der Abstand des Punktes $a_1 u + b_1 v + 1 = 0$ von derjenigen Geraden, deren Linienkoordinaten u_1, v_1 sind?

416. (372.) Wie groß sind die Höhen des Dreiecks, dessen Eckpunkte den Gleichungen

$$-2u + v + 1 = 0, \quad 6u - 2v + 1 = 0, \quad 3u + 7v + 1 = 0$$

entsprechen? Welches ist die Gleichung des Höhenpunktes?

417. (373.) Es soll die Gleichung desjenigen Punktes bestimmt werden, der den Abstand der beiden Punkte

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

halbiert.

Beispiel.

$$A_1 \equiv 5u - 3v + 1 = 0, \quad A_2 \equiv 7u + 13v + 1 = 0.$$

418. (374.) Der Abstand zwischen den beiden Punkten

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

ist im Verhältnis m zu n zu teilen. Welches ist die Gleichung des Teilpunktes?

419. (375.) Gegeben sind drei Punkte:

$$a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad a_2 u + b_2 v + 1 = 0, \quad a_3 u + b_3 v + 1 = 0.$$

Es sollen die Koordinaten einer Geraden bestimmt werden, die durch den ersten Punkt geht und eine solche Lage hat, daß die von den beiden andern Punkten auf sie gefällten Lote gleichlang sind.

420. (376.) Gegeben sind die drei Punkte $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Welches sind die Koordinaten der geraden Linie, von welcher die drei Punkte Abstände haben, welche sich wie 1 zu 2 zu 3 verhalten?

421. (377.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Punkte $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Welcher Punkt entspricht der Gleichung $A_1 - A_2 = 0$?

422. (378.) Die Gleichungen der Ecken eines Dreiecks sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Welches ist die Gleichung des Schwerpunktes desselben?

423. (379.) Von einem Parallelogramm sind drei Eckpunkte $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ gegeben. Welche Lage kann der vierte Eckpunkt besitzen?

424. (380.) Die Koordinaten zweier geraden Linien sind (u_1, v_1) und (u_2, v_2). Wie groß ist der Winkel, den beide miteinander einschließen?

425. (381.) Welcher Bedingung müssen die Koordinaten zweier geraden Linien genügen, 1. wenn die beiden Geraden parallel laufen sollen? 2. wenn die beiden Geraden aufeinander lotrecht stehen sollen?

426. Gegeben sind die Koordinaten von zwei Geraden $(u_1, v_1; u_2, v_2)$. Welches sind die Koordinaten der Winkelhalbierenden dieser Geraden?

427. (382.) Welches ist die Gleichung eines beliebigen Punktes, der auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ liegt?

428. (383.) Welches ist die geometrische Bedeutung des Koeffizienten k in der Gleichung $A_1 - kA_2 = 0$?

429. (384.) Welche Bedingungsgleichung muß erfüllt sein, wenn die drei Punkte $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ in einer geraden Linie liegen sollen?

430. (385.) Welche Bedingungsgleichung muß erfüllt sein, wenn drei gerade Linien, deren Koordinaten (u_1, v_1); (u_2, v_2); (u_3, v_3) sind, durch einen Punkt gehen sollen?

431. (386.) Gegeben sind die drei Eckpunkte eines Dreiecks $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Die drei Seiten des Dreiecks seien bis in die Unendlichkeit verlängert. Was läßt sich über die Lage der unendlich fernen Punkte derselben bestimmen?

432. Es sind die Koordinaten der Verbindungslinie zweier unendlich ferner Punkte zu bestimmen.

433. Welches ist die Gleichung des Koordinatenanfangspunktes? In welcher Beziehung stehen der Koordinatenanfangspunkt und die unendlich ferne Gerade bezüglich ihrer Koordinaten und Gleichungen in Punkt- bzw. Linienkoordinaten?

434. (387.) Es soll die Gleichung desjenigen Punktes bestimmt werden, in dem die Verbindungslinie der Punkte

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

die der Punkte

$$A_3 \equiv a_3 u + b_3 v + 1 = 0, \quad A_4 \equiv a_4 u + b_4 v + 1 = 0$$

durchschneidet.

435. (388.) Die drei Eckpunkte eines Dreiecks entsprechen den Gleichungen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Die Seiten des Dreiecks sind äußerlich geteilt; die Abschnitte von $A_1 A_2$ sind p_3 und q_3, die von $A_2 A_3$ p_1 und q_1 und die von $A_3 A_1$ p_2 und q_2, und zwar besteht zwischen den Abschnitten die Relation $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$. Wie liegen die drei Teilpunkte der Seiten?

436. (389.) Erteilt man der Größe k in der Gleichung

$$5u - 4v + 1 - k(2u + 3v + 1) = 0$$

alle möglichen reellen Werte, so entspricht der Gleichung eine Reihe von Punkten, welche alle auf der Verbindungslinie der beiden Punkte $5u - 4v + 1 = 0$ und $2u + 3v + 1 = 0$ liegen. Welche Punkte der Reihe entsprechen den Werten $k = 3$ und $k = -7$?

437. (390.) Zu der Punktreihe

$$2u + 13v + 1 + k(7u - 2v + 1) = 0$$

gehört der Punkt $6u + v + 1 = 0$. Welchem Werte von k entspricht derselbe?

438. (391.) Welche Lage haben die Punkte $A_1 + kA_2 = 0$ und $kA_1 + A_2 = 0$ zu den beiden Fundamentalpunkten $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$?

439. Welches ist die Bedingung dafür, daß der Gleichung

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0$$

zwei Punkte entsprechen? Wann liegen diese Punkte im Unendlichen?

Das Doppelverhältnis von vier Punkten.

Erklärung. Sind die Gleichungen von vier Punkten auf einer geraden Linie

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0;\ A_1 - k_1 A_2 = 0,\ A_1 - k_2 A_2 = 0,$$

so wird das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ als das Doppelverhältnis des zweiten Punktepaares zum ersten Punktepaar bezeichnet.

440. (392.) Gegeben sind die beiden Punktepaare

$$\begin{cases} 5u - 4v + 1 = 0, \\ 3u + 8v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4u + 2v + 1 = 0, \\ u + 20v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welchen Wert hat das Doppelverhältnis des zweiten Punktepaares zum ersten?

441. (393.) Auf einer Geraden liegt das Punktepaar

$$3u - 2v + 1 = 0, \quad 4u + 7v + 1 = 0$$

und der Punkt $3\frac{2}{3}u + 4v + 1 = 0$. Welches ist die Gleichung des vierten Punktes, wenn der Wert des Doppelverhältnisses $= \frac{2}{5}$ sein soll?

442. (394.) Gegeben ist das Punktepaar

$$6u + 5v + 1 = 0, \quad 14u + 3v + 1 = 0.$$

Der dritte Punkt sei der Halbierungspunkt der Strecke zwischen diesen beiden Punkten. Welches ist die Gleichung des vierten Punktes, wenn der Wert des Doppelverhältnisses $= \frac{2}{3}$ sein soll?

443. (395.) Gegeben ist das Punktepaar

$$2u - v + 1 = 0, \quad 5u + 7v + 1 = 0.$$

Der dritte Punkt sei der unendlich ferne Punkt der Geraden, welche durch die beiden gegebenen Punkte hindurchgeht. Welches ist die Gleichung des vierten Punktes, wenn der Wert des Doppelverhältnisses $= -\frac{3}{2}$ sein soll?

444. (396.) Gegeben sind die Gleichungen von zwei Punktepaaren auf einer Geraden

$$\begin{cases} A_1 - k_1 A_2 = 0, \\ A_1 - k_2 A_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 - h_1 A_2 = 0, \\ A_1 - h_2 A_2 = 0. \end{cases}$$

Welches ist der Wert des Doppelverhältnisses des zweiten Punktepaares zum ersten?

445. (397.) Von der Punktreihe

$$5u - 4v + 1 - k(u + 3v + 1) = 0$$

sind zwei Punktepaare gegeben, nämlich:

$$\begin{cases} 3u - \frac{1}{2}v + 1 = 0, \\ -u + 6\frac{1}{2}v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -7u + 17v + 1 = 0, \\ 13u - 18v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welchen Wert besitzt das Doppelverhältnis des zweiten Punktepaares zum ersten?

446. (398.) Von der Punktreihe

$$3u - 2v + 1 - k(4u + 7v + 1) = 0$$

ist das Punktepaar

$$2u - 11v + 1 = 0, \quad 2\frac{1}{3}u - 8v + 1 = 0$$

und der Punkt $u - 20v + 1 = 0$ gegeben. Es soll die Gleichung eines vierten Punktes bestimmt werden, so daß der Wert des Doppelverhältnisses $= \frac{13}{16}$ wird.

447. Von den Strahlen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_1 + k_1 L_2 = 0$, $L_1 + k_2 L_2 = 0$ eines Büschels möge eine Gerade in den Punkten $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 + h_1 A_2 = 0$, $A_1 + h_2 A_2 = 0$ geschnitten werden. In welcher Beziehung steht das Doppelverhältnis der vier Strahlen zu dem Doppelverhältnis der vier entsprechenden Punkte?

Harmonische Punkte.

Erklärung. Hat das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare A_1, A_2 und B_1, B_2 den Wert -1, so wird dasselbe ein harmonisches genannt. Die Strecke zwischen den Punkten eines Paares wird in diesem Falle von den beiden Punkten des andern Paares harmonisch geteilt.

448. (399.) Welche Bedingungsgleichung muß erfüllt sein, wenn das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare

$$\begin{cases} A_1 - k_1 A_2 = 0, \\ A_1 - k_2 A_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 - h_1 A_2 = 0, \\ A_1 - h_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

ein harmonisches sein soll?

449. (400.) Gegeben sind die beiden Punktepaare

$$\begin{cases} 11u - 2v + 1 = 0, \\ 3u + v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\frac{4}{11}u - \frac{7}{11}v + 1 = 0, \\ 51u - 17v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es soll nachgewiesen werden, daß der Abstand zwischen den Punkten des einen Paares durch die beiden andern Punkte harmonisch geteilt wird.

450. (401.) Zu drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen:

$$7u + 3v + 1 = 0, \quad 2u - 5v + 1 = 0, \quad 27u + 35v + 1 = 0$$

ist der vierte harmonische Punkt zu bestimmen.

451. (402.) Von den drei Punkten $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$ mögen die beiden ersten als konjugierte betrachtet werden. Welches ist die Gleichung des vierten harmonischen Punktes?

452. (403.) Gegeben sind zwei Punktepaare auf einer Geraden, nämlich:

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 5u + 3v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6u + v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es soll ein Punktepaar gefunden werden, welches zu jedem der gegebenen Punktepaare harmonisch ist.

453. (404.) Die beiden Punktepaare der vorigen Aufgabe seien in andrer Weise gruppiert, nämlich:

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 6u + v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5u + 3v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches Punktepaar wird zu beiden Paaren harmonisch sein?

454. (405.) Die vier Punkte der Aufgabe 452 seien in folgender Weise geordnet:

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5u + 3v + 1 = 0, \\ 6u + v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches Punktepaar ist zu beiden Paaren harmonisch?

455. (406.) Welchen allgemeinen Satz bestätigen die Lösungen der drei vorstehenden Aufgaben?

456. Welche Folgerung läßt sich aus Lösung 447 für vier Strahlen eines Büschels ziehen, die durch vier harmonische Punkte gehen, bzw. für vier Punkte einer Geraden, die auf vier harmonischen Strahlen liegen?

Involutorische Punktreihen.

457. (407.) Drei Punktepaare

$$\begin{cases} A_1 - h_1 A_2 = 0, \\ A_1 - h_2 A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 - h_3 A_2 = 0, \\ A_1 - h_4 A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 - h_5 A_2 = 0, \\ A_1 - h_6 A_2 = 0 \end{cases}$$

bilden eine Involution, wenn sich ein viertes Punktepaar finden läßt, welches zu jedem der gegebenen Punktepaare harmonisch ist. Welcher Bedingungsgleichung müssen in diesem Falle die Parameter der gegebenen Punktepaare genügen?

458. Drei Punktepaare haben die Gleichungen

$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 + f_1 A_2 = 0, \\ A_1 + f_2 A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 + f_3 A_2 = 0, \\ A_1 + f_4 A_2 = 0. \end{cases}$$

Welches ist bei diesen die Bedingung für die Involution?

459. (408.) Von der Punktreihe

$$5u - 4v + 1 - k(3u + 8v + 1) = 0$$

sind drei Punktepaare gegeben:

$$\begin{cases} 2u + 14v + 1 = 0, \\ 3\frac{2}{3}u + 4v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4u + 2v + 1 = 0, \\ -u + 32v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u + 20v + 1 = 0, \\ 3\frac{11}{13}u + 2\frac{12}{13}v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es ist zu untersuchen, ob diese Punktepaare eine Involution bilden.

460. (409.) Von der Punktreihe

$$7u + 9v + 1 - k(u - 3v + 1) = 0$$

sind zwei Punktepaare

$$\begin{cases} 13u + 21v + 1 = 0, \\ 19u + 33v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\ 5u - 15v + 1 = 0, \\ -11u - 27v + 1 = 0 \end{cases}$$

und der Punkt $3u + v + 1 = 0$ gegeben. Es soll ein Punkt gefunden werden, der dem letzten Punkte zugeordnet ist, so daß die drei Punktepaare eine Involution bilden.

461. (410.) Von einer involutorischen Punktreihe sind zwei Punktepaare gegeben:

$$\begin{cases} 2u + 9v + 1 = 0, \\ 5u + 3v + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6u + v + 1 = 0, \\ 9u - 5v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen der Doppelpunkte der Involution?

462. (411.) Wie viele Doppelpunkte können in einer involutorischen Punktreihe vorkommen?

463. (412.) Gegeben sind die beiden Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe

$$4\tfrac{7}{9}u - \tfrac{5}{9}v + 1 = 0, \quad 27u + 35v + 1 = 0.$$

Welcher Punkt der Involution entspricht dann dem Punkte

$$7u + 3v + 1 = 0?$$

464. (413.) Die beiden Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe entsprechen den Gleichungen

$$5u + 9v + 1 = 0, \quad 11u - 13v + 1 = 0.$$

Welcher Punkt der Involution entspricht dem unendlich fernen Punkte der Geraden, auf welcher die Punktreihe liegt?

465. (414.) Welche Lage haben je zwei zugeordnete Punkte einer involutorischen Punktreihe, wenn einer der Doppelpunkte in der Unendlichkeit liegt?

466. (415.) Die beiden Doppelpunkte einer Involution fallen zusammen, und zwar ist die Lage derselben bestimmt durch die Gleichung $A_1 = 0$. Wie liegen dann die Punkte, welche den Punkten $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ usw. zugeordnet sind?

467. (416.) Welcher Bedingungsgleichung müssen die Parameter von zwei Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe genügen, wenn die Doppelpunkte der Involution imaginär sein sollen?

468. (417.) Gegeben sind auf einer Geraden

1. die beiden Punktepaare

$$\begin{cases} 5u - 3v + 1 = 0, \\ 7u + v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 12u + 11v + 1 = 0, \\ 9u + 5v + 1 = 0, \end{cases}$$

2. die beiden Punktepaare

$$\begin{cases} 2u - 9v + 1 = 0, \\ 11u + 9v + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6u - v + 1 = 0, \\ u - 11v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es soll ein Punktepaar gesucht werden, welches sowohl mit den beiden ersten Punktepaaren als auch mit den beiden letzten Punktepaaren eine Involution bildet.

469. Was folgt aus Lösung 447 für die Punkte einer Geraden, die ein involutorisches Strahlenbüschel schneidet, und für die Strahlen eines Büschels, die durch die Punkte einer Involution gehen?

470. Auf der Achse eines Hohlspiegels (Öffnung unendlich klein vorausgesetzt) liegen drei Punkte und ihre entsprechenden Bilder. Es ist zu zeigen, daß diese drei Punktepaare eine Involution bilden. Welches sind die Doppelpunkte?

Homogene (trimetrische) Linienkoordinaten.

471. (418.) Gegeben sind die Gleichungen von drei Punkten, die nicht in einer Geraden liegen:

$$U_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0,$$
$$U_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0,$$
$$U_3 \equiv a_3 u + b_3 v + 1 = 0.$$

Es soll die Gleichung des Punktes $au + bv + 1 = 0$ in der Form $k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 = 0$ dargestellt werden. Welche Werte haben die Koeffizienten k_1, k_2, k_3?

Erklärung. Nach der vorhergehenden Lösung kann man die Gleichung jedes Punktes P mit Hilfe von drei gegebenen Punkten (Fundamentalpunkten, Ecken des Fundamentaldreiecks) in der Form $k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$ darstellen. Infolge der Homogenität dieser Gleichung in bezug auf die Größen k und u (vgl. Erklärung nach Aufgabe 345) werden im allgemeinen die Größen k den in der vorigen Lösung entwickelten Werten nur proportional sein, ebenso die Größen u den Abständen der Fundamentalpunkte

von einer durch den Punkt P gehenden Geraden (vgl. Lösung 415). Auch hier ist also zu unterscheiden zwischen absoluten (u_1, u_2, u_3 wirkliche Abstände) und relativen trimetrischen Linienkoordinaten (u_1, u_2, u_3 den Abständen proportional), ebenso zwischen der allgemeinen Gleichung eines Punktes $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$ (k_1, k_2, k_3 den Werten in Lösung 471 proportional) und der ursprünglichen Normalgleichung (k_1, k_2, k_3 gleich den betreffenden Werten). — Der Koordinatenanfangspunkt wird innerhalb des Dreiecks liegend vorausgesetzt, so daß die Koordinaten jeder außerhalb des Dreiecks liegenden Geraden positiv zu nehmen sind.

472. (419.) Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten k_1, k_2, k_3 in der Gleichung des Punktes

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0?$$

473. Welche Beziehung besteht zwischen den Loten (u_1', u_2', u_3') von den Ecken des Fundamentaldreiecks auf eine beliebige Gerade (ihren absoluten Koordinaten)?

474. Gegeben sind die relativen Koordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden. Wie findet man ihre absoluten Koordinaten u_1', u_2', u_3'?

475. Welche Beziehung besteht zwischen den Konstanten k_1, k_2, k_3 der Gleichung $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$, wenn dieselben die in Lösung 472 angegebenen Werte haben (Normalform)?

476. Gegeben ist die allgemeine Gleichung eines Punktes $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$. Mit welcher Größe λ muß man diese Gleichung multiplizieren, damit λk_1, λk_2, λk_3 die in Lösung 472 angegebenen Werte erhalten (Reduktion auf die Normalform)?

477. (420.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Punkte:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0, \quad k_1'u_1 + k_2'u_2 + k_3'u_3 = 0.$$

Es sollen die Linienkoordinaten der Geraden bestimmt werden, welche durch diese beiden Punkte geht.

478. (421.) Die Linienkoordinaten von zwei geraden Linien sind u_1', u_2', u_3' und u_1'', u_2'', u_3''. Welches ist die Gleichung des Punktes, in dem sich die beiden Geraden schneiden?

479. Welches ist die Bedingung dafür, daß drei gerade Linien mit den Koordinaten u_1', u_2', u_3'; u_1'', u_2'', u_3''; u_1''', u_2''', u_3''' sich in einem Punkte schneiden?

Anmerkung. Im folgenden soll die Gleichung eines Punktes $k_1^{(n)}u_1 + k_2^{(n)}u_2 + k_3^{(n)}u_3 = 0$ kurz mit $P^{(n)} = 0$ bezeichnet werden.

480. (422.) Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die drei Punkte

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P'' = 0$$

in einer geraden Linie liegen sollen?

481. (423.) Es ist die Gleichung eines Punktes anzugeben, der in der Verbindungslinie der beiden Punkte $P' = 0$ und $P'' = 0$ liegt.

482. (424.) Welche Bedeutung hat die Konstante f in der Punktgleichung $P = P' + fP'' = 0$?

483. (425.) Welches sind die Gleichungen der Halbierungspunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks?

484. (426.) Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn der Gleichung

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$$

ein unendlich ferner Punkt entsprechen soll?

485. Es sind die Koordinaten der unendlich fernen Geraden zu bestimmen.

486. Unter welcher Bedingung sind zwei Geraden mit den (relativen) Koordinaten u_1', u_2', u_3', bzw. u_1'', u_2'', u_3'' einander parallel?

487. Gegeben sind die Gleichungen von vier Punkten einer Geraden $P' = 0$, $P'' = 0$, $P' + f_1 P'' = 0$, $P' + f_2 P'' = 0$. Welches ist das Doppelverhältnis dieser Punkte?

488. (427.) In welcher Beziehung stehen die Punkte, welche den Gleichungen

$$P' = 0, \quad P'' = 0, \quad P' + fP'' = 0, \quad P' - fP'' = 0$$

entsprechen?

489. (428.) Welcher Bedingungsgleichung müssen die Konstanten f_1, f_2, h_1, h_2 genügen, wenn die vier Punkte

$$P' + f_1 P'' = 0, \quad P' + f_2 P'' = 0, \quad P' + h_1 P'' = 0, \quad P' + h_2 P'' = 0$$

harmonische sein sollen?

490. (429.) Welches ist die Gleichung des Schwerpunktes in dem Fundamentaldreieck? Die Gleichungen der Ecken sind $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$.

491. (430.) Die Gleichung des Mittelpunktes desjenigen Kreises ist zu bestimmen, der durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks geht.

492. (431.) Welche Gestalt hat die Gleichung des Höhenpunktes des Fundamentaldreiecks?

493. (432.) Wie läßt sich nachweisen, daß der Schwerpunkt, der Höhenpunkt und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des Fundamentaldreiecks in einer geraden Linie liegen?

494. (433.) Es ist die Gleichung des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises zu bestimmen, d. i. desjenigen Kreises, der von den Seiten des Fundamentaldreiecks berührt wird.

495. (434.) Die Ecktransversalen des Fundamentaldreiecks, welche durch die Punkte gehen, in denen die Seiten von den anbeschriebenen Kreisen berührt werden, schneiden sich in einem Punkte. Welches ist die Gleichung dieses Punktes?

496. (435.) Wie läßt sich nachweisen, daß der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und der fünfte merkwürdige Punkt des Fundamentaldreiecks in einer geraden Linie liegen?

497. (436.) Welchen Abstand besitzt der Punkt

$$\frac{d_1}{h_1}u_1 + \frac{d_2}{h_2}u_2 + \frac{d_3}{h_3}u_3 = 0$$

von der Geraden, deren absolute Koordinaten u_1', u_2', u_3' sind?

498. Die Seiten U_2U_3 und U_1U_3 des Fundamentaldreiecks seien harmonisch geteilt und die Teilpunkte unter sich verbunden. Welche Lage haben diese Verbindungslinien?

499. Eine Gerade schneide die Diagonalen eines vollständigen Vierseits. Zu jedem der Schnittpunkte sei auf der betr. Diagonale der vierte harmonische Punkt bezüglich der Ecken des Vierseits bestimmt. Es ist zu zeigen, daß auch diese harmonischen Punkte in einer Geraden liegen.

500. Es ist nachzuweisen, daß in jedem vollständigen Vierseit jede Diagonale durch die beiden andern harmonisch geteilt wird.

501. Ein Dreieck $U_1'\ U_2'\ U_3'$ möge zum Fundamentaldreieck $U_1U_2U_3$ eine solche Lage haben, daß die Linien U_1U_1', U_2U_2', U_3U_3' durch einen Punkt $P \equiv k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$ gehen. Es ist zu zeigen, daß die Schnittpunkte entsprechender Seiten beider Dreiecke auf einer Geraden liegen.

502. Eine beliebige Gerade schneide die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks. Es ist zu zeigen, daß die Schnittpunkte sich in Involution befinden.

503. Zu den Schnittpunkten der Geraden (u_1', u_2', u_3') mit den Seiten des Fundamentaldreiecks sei bezüglich der Ecken auf jeder Seite der vierte harmonische Punkt konstruiert und jeder derselben mit der gegenüberliegenden Ecke des Fundamentaldreiecks verbunden. Wie liegen diese Verbindungslinien zueinander?

504. Welches ist die Polare des Schwerpunktes des Fundamentaldreiecks?

505. Es soll derjenige Punkt bestimmt werden, der dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises bezüglich des Schwerpunktes und des Höhenpunktes des Fundamentaldreiecks harmonisch zugeordnet ist.

506. Welche Entfernung hat der gesuchte Punkt der vorigen Aufgabe von den Mitten der Seiten, den Fußpunkten der Höhen und den Mitten der oberen Höhenabschnitte im Fundamentaldreieck?

Enveloppen.

Erklärung. Ebenso wie alle Punkte, die einer gewissen Bedingung unterworfen sind, deren Koordinaten also eine Gleichung erfüllen, auf einer (im allgemeinen krummen) Linie liegen, dem geometrischen Ort der Punkte, so können alle Geraden, die einer Bedingung unterworfen sind, deren Linienkoordinaten demnach eine Gleichung erfüllen, als Tangenten einer (krummen) Linie angesehen werden, die man die Enveloppe der Geraden nennt. Z. B. sind alle Geraden, die von dem Punkte P den Abstand r haben, Tangenten des mit r um P geschlagenen Kreises. Die Gleichung zwischen den Linienkoordinaten u und v, die die Bedingung enthält, heißt die Gleichung der Enveloppe in Linienkoordinaten. Ist diese vom ersten Grade, so ist die Enveloppe ein Punkt, d. h. alle der Bedingung unterworfenen Geraden gehen durch einen Punkt.

507. Welches ist die Enveloppe der Geraden, die von zwei festen Punkten

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

gleichen Abstand haben?

508. Gesucht ist die Enveloppe der Geraden, deren Abstände von zwei festen Punkten ($A_1 = 0$ und $A_2 = 0$) sich wie $m : n$ verhalten.

509. Welches ist die Enveloppe der Geraden, die mit einer festen Geraden (u_1, v_1) den Winkel α bilden?

510. Es ist die Enveloppe der Geraden zu bestimmen, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Differenz d haben.

511. Über der konstanten Grundlinie c seien Dreiecke errichtet, deren Winkel an der Spitze sämtlich $= \gamma$ sind. Welches sind die Enveloppen der Halbierungslinien des Winkels γ und seines Außenwinkels?

512. Welches sind die Enveloppen der von den Punkten B und C eines Dreiecks ABC ausgehenden Schwerpunktstransversalen, wenn die Seite BC sich um den Punkt $au + bv + 1 = 0$ dreht, der gegenüberliegende Winkel A aber festliegt?

Anmerkung. In den folgenden Aufgaben (513—520) sei die Lage des Dreiecks ABC dieselbe wie in Nr. 209—216.

513. Welches sind die Enveloppen der von den Punkten B und C ausgehenden Schwerpunktstransversalen, wenn in dem Dreieck die Seite $BC = a$ und der Winkel B konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

514. Welches sind die Enveloppen der Halbierungslinien der Außenwinkel bei B und C, wenn der Umfang des Dreiecks $= 2s$ und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

515. Es sind die Enveloppen der Halbierungslinien des Innenwinkels bei C und des Außenwinkels bei B zu bestimmen, wenn $BC + AB - AC = 2s_b$ und der Winkel A konstant sind?

516. Zu bestimmen sind die Enveloppen der Halbierungslinien der Innenwinkel bei B und C, wenn $AB + AC - BC = 2s_a$ und der Winkel A konstant sind.

517. Welches sind die Enveloppen der Halbierungslinien des Innen- und des Außenwinkels bei C, wenn $AB = c$ und das Verhältnis $BC : AC = m : n$ konstant sind?

518. Die Fußpunkte der von den Punkten A und B ausgehenden Höhen seien durch eine Gerade verbunden. Welches ist die Enveloppe dieser Geraden, wenn $AB = c$ und die Differenz $\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = d^2$ konstant sind?

519. Zwei Außenwinkel des Dreiecks seien halbiert und die Halbierungslinien bis zu den Schnittpunkten mit den gegenüberliegenden Seiten verlängert. Welches ist die Enveloppe der Verbindungslinie der Schnittpunkte, wenn die von A gezogene Höhe $= h_a$ und die Differenz der Winkel $A - B = \delta$ konstant sind?

520. Die Innenwinkel bei B und C seien halbiert und die Schnittpunkte der Halbierungslinien mit den gegenüberliegenden Seiten verbunden; es ist die Enveloppe dieser Verbindungslinie gesucht für den Fall, daß die Höhe h_a und die Differenz $\sphericalangle A - \sphericalangle B = \delta$ konstant sind.

521. Ein Punkt P einer beliebigen von A ausgehenden Transversale des Dreiecks ABC sei mit den Ecken B und C verbunden, die Verbindungslinien seien bis zu den Schnittpunkten mit AC und AB verlängert und die letzteren Schnittpunkte seien durch eine Gerade verbunden. Die Enveloppe dieser letzten Geraden ist für den Fall gesucht, daß P auf der Transversalen fortrückt.

Der Kreis.

Die Gleichung des Kreises.

522. (437.) Welches ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Koordinaten a, b besitzt und dessen Radius $= r$ ist?

Beispiele. $\alpha)$ $a = 0$, $b = 0$, $r = 9$.

$\beta)$ $a = 7$, $b = 0$, $r = 3$.

$\gamma)$ $a = 0$, $b = -2$, $r = 11$.

$\delta)$ $a = -4$, $b = 17$, $r = 1$.

523. (438.) Welchen Bedingungen müssen die Konstanten der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genügen, wenn dieselbe einem Kreise entsprechen soll?

524. (439.) Mittelpunktskoordinaten und Radius eines Kreises zu bestimmen, welcher der Gleichung

$$Ax^2 + Ay^2 + Lx + My + N = 0$$

entspricht. Wie liegt der Kreis, wenn $N = 0$ ist?

Beispiele.

a) $15x^2 + 15y^2 + 120x - 90y - 45 = 0$.

b) $7x^2 + 7y^2 + 49x + 84y + 14 = 0$.

c) $2{,}5x^2 + 2{,}5y^2 + 12{,}5x - 7{,}5y + 10 = 0$.

d) $3x^2 + 3y^2 + 8x - 6y = 0$.

525. (440.) Welche Lage haben die beiden Kreise, welche den Gleichungen

$$y^2 = x(2r - x) \text{ und } y^2 = -x(2r + x)$$

entsprechen?

526. (441.) In welcher Beziehung müssen die Konstanten der Gleichungen zweier Kreise

$$A_1x^2 + A_1y^2 + B_1x + C_1y + F_1 = 0,$$
$$A_2x^2 + A_2y^2 + B_2x + C_2y + F_2 = 0$$

stehen, wenn dieselben konzentrisch sein sollen?

527. (442.) In welcher Beziehung müssen die Konstanten der Gleichungen

$$A_1x^2 + A_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$
$$A_2x^2 + A_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

stehen, wenn die Kreise, welche denselben entsprechen, kongruent sein sollen?

528. (443.) Welche Bedeutung hat die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0?$$

529. (444.) Welches Gebilde entspricht der Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + Ay^2 + Lx + My + N = 0,$$

wenn der Ausdruck $\frac{L^2 + M^2 - 4AN}{4A^2}$ negativ ist?

530. (445.) Es soll die Kurve bestimmt werden, welche der Proportion

$$y - 5 : 3 - x = x : y$$

entspricht.

531. (446.) Es sollen Gestalt und Lage derjenigen Kurve bestimmt werden, welche der Gleichung

$$(x - 4)(x + 7) + (y + 4)(y - 7) = 0$$

entspricht.

532. (447.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise:

$$x^2 + y^2 + 14x - 10y - 7 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 22y + 25 = 0.$$

Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche die Mittelpunkte beider verbindet? Wie lang ist das Lot, welches sich vom Koordinatenanfangspunkte auf diese Gerade fällen läßt?

533. (448.) Welches geometrische Gebilde entspricht der Gleichung

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + k(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0?$$

534. (449.) Zur Bestimmung der Polargleichung eines Kreises sind die Polarkoordinaten des Mittelpunktes ϱ_1, φ_1 und der Radius r gegeben. Wie heißt die Gleichung?

535. (450.) Die Gleichung eines Kreises ist $x^2 + y^2 = 49$. Durch den Punkt $x_1 = -7$, $y_1 = -8$ werde ein neues Koordinatensystem gelegt, dessen Achsen denen des ursprünglichen Systems parallel laufen. Welches ist die Gleichung des Kreises bezüglich des zweiten Koordinatensystems?

536. (451.) Welche Änderung erfährt die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, wenn das rechtwinklige Koordinatensystem um den Winkel α gedreht wird?

537. (452.) Gegeben ist die Gleichung eines Kreises

$$x^2 + y^2 - 7x + 11y - 3 = 0.$$

Welche Gestalt nimmt dieselbe an, wenn das rechtwinklige Koordinatensystem um einen Winkel von 45^0 gedreht wird?

538. (453.) Die Gleichung eines Kreises ist

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0.$$

Das rechtwinklige Koordinatensystem werde um den Winkel $\alpha = 30^0$ gedreht und außerdem so fortgeschoben, daß der Koordinatenanfangspunkt mit dem Punkte $(5, -2)$ zusammenfällt. Welche Gestalt wird dadurch die Gleichung des Kreises erhalten?

539. (454.) Gegeben ist ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenwinkel α. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $= r$ und dessen Mittelpunktskoordinaten a und b sind?

540. Unter welchen Bedingungen entspricht der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ein Kreis, wenn das Koordinatensystem ein schiefwinkliges mit dem Koordinatenwinkel α ist?

Der Kreis und die Gerade.

541. (455.) Welches sind die Koordinaten der Punkte, in denen der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ von der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ geschnitten wird?

542. (456.) a) In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = Mx + n$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$? Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die Gerade den Kreis berührt?

b) Welches sind die Koordinaten der Schnittpunkte, wenn die Gleichung der Geraden $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ ist?

Beispiele. a) $x^2 + y^2 = 169$, $y = 7x - 79$.

b) $x^2 + y^2 = 100$, $4x + 3y = 50$.

c) $x^2 + y^2 = 289$, $2y - x = 46$.

543. (457.) In welchen Punkten wird der Kreis

$$x^2 + y^2 + Bx + Cy + F = 0$$

von der Geraden $Lx + My + N = 0$ geschnitten? Wie weit ist der Mittelpunkt des Kreises von der Geraden entfernt?

Beispiele.

a) $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0, \quad 2y - 3x + 12 = 0.$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 27 = 0, \quad 6x + 5y = 54.$

544. (458.) Gegeben ist der Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ und die Gerade $Lx + My + N = 0$. Welcher Relation müssen die Konstanten beider Gleichungen genügen, wenn keine reellen Schnittpunkte der beiden Gebilde vorhanden sein sollen?

Erklärung. Ebenso wie die Koordinaten aller Punkte, die auf einer krummen Linie liegen, eine Gleichung erfüllen, so besteht zwischen den Linienkoordinaten aller Geraden, die Tangenten einer Kurve sind, eine Gleichung. Dieselbe heißt die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten.

545. (459.) a) Gegeben sind die Koordinaten einer geraden Linie u_1 und v_1. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn dieselbe den Kreis K_1, dessen Mittelpunkt der Gleichung $a_1 u + b_1 v + 1 = 0$ entspricht und dessen Radius r_1 ist, berühren soll? Welches ist die Gleichung dieses Kreises in Linienkoordinaten?

b) Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichung

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0$$

genügen, wenn derselben ein Kreis entsprechen soll? Welches ist die Gleichung des Mittelpunktes? Wie groß ist der Radius?

546. (460.) In welchen Punkten schneidet der Kreis

$$x^2 + y^2 + 22x - 18y + 57 = 0$$

die Koordinatenachsen?

547. (461.) Welches ist die Gleichung desjenigen Kreises, der die positiven Teile der Koordinatenachsen in der Entfernung 7 vom Koordinatenanfangspunkte berührt?

548. (462.) Es sind die Gleichungen derjenigen Tangenten zu bestimmen, welche sich vom Koordinatenanfangspunkte an den Kreis $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + F = 0$ ziehen lassen.

Beispiele.

a) $x^2 + y^2 - 22x - 14y + 161 = 0.$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 27 = 0.$

549. (463.) Die Gerade $3y + 5x + 19 = 0$ schneidet den Kreis $y^2 + x^2 = 113$ in zwei Punkten. Wie lang ist die Sehne? Wie groß ist der zugehörige Centriwinkel?

550. (464.) Es ist die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche den Kreis $x^2 + y^2 = 169$ in zwei Punkten schneidet, deren Abszissen -12 und $+7$, und deren Ordinaten positiv sind. Wie groß ist der Inhalt des von der Sehne und den Radien eingeschlossenen Dreiecks?

551. (465.) Durch den Punkt P des Kreises $x^2 + y^2 = 130$, der die Abszisse $+9$ und eine negative Ordinate besitzt, soll eine Sehne gezogen werden, welche der Geraden $5y - 4x + 7 = 0$ parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben? Welches sind die Koordinaten des zweiten Durchschnittspunktes?

552. (466.) Durch den Punkt (x_1, y_1) des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist eine Sehne zu ziehen, welche vom Mittelpunkte des Kreises den Abstand d hat.

Beispiel. $x^2 + y^2 = 65$; $x_1 = -7$, $y_1 = 4$; $d = 5$.

553. (467.) Von dem Koordinatenanfangspunkte ist durch den Kreis $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 25$ eine Sekante zu ziehen, so daß die innerhalb des Kreises liegende Sehne die Länge 6 besitzt.

554. (468.) Durch den Punkt (x_1, y_1) innerhalb der Fläche des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ soll eine Sehne gezogen werden, die in diesem Punkte halbiert wird.

Beispiel. $x^2 + y^2 = 277$, $x_1 = 3$, $y_1 = -5$.

Tangente und Normale des Kreises.

555. (469.) An den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ soll im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt werden. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele.

a) $x^2 + y^2 = 353$, $x_1 = 8$, $y_1 = 17$.

b) $x^2 + y^2 = 250$, $x_1 = 9$, $y_1 < 0$.

c) $x^2 + y^2 = 343$, $x_1 = -11$, $y_1 \gtrless 0$.

556. (470.) An den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ ist in dem Punkte, dessen Abszisse x_1 und dessen Ordinate negativ ist, eine Tangente zu legen. Wie lang ist das Stück derselben zwischen den beiden Koordinatenachsen? Welches ist die Gleichung der Normale?

Beispiel. $x^2 + y^2 = 232$, $x_1 = 14$.

557. (471.) Gegeben ist der Kreis $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. Im Punkte (x_1, y_1) ist an denselben eine Tangente zu legen. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele.

a) $(x-5)^2+(y+8)^2=113, \quad x_1=13.$

b) $x^2+y^2-14x-4y-5=0, \quad x_1=10.$

c) $x^2+y^2-4x+22y+25=0, \quad x_1=3.$

558. (472.) An den Kreis $x^2+y^2-6x-14y-3=0$ sind in den Punkten, deren Abszisse $x_1=9$ ist, Tangenten zu legen. Wie weit ist der Koordinatenanfangspunkt von diesen Tangenten entfernt? Wie groß sind die Stücke derselben zwischen den Koordinatenachsen?

559. (473.) Im Punkte (x_1, y_1) ist an den Kreis

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

eine Tangente gezogen. Unter welchem Winkel schneidet dieselbe den vom Koordinatenanfangspunkte nach dem Berührungspunkte gezogenen Radiusvektor? Welches ist die Gleichung der Normale?

Beispiel.

$$x^2+y^2-14x-4y-5=0, \quad x_1=10, \quad y_1=9.$$

560. (474.) An den Kreis $x^2+y^2-6x+10y-27=0$ sind in den Punkten, deren Abszisse $=9$ ist, Tangenten gelegt. Unter welchen Winkeln sind dieselben gegen die X-Achse geneigt?

561. (475.) Gegeben ist der Kreis $x^2+y^2+10x-6y-2=0$. An denselben sind Tangenten zu legen, welche der Geraden $y=2x-7$ parallel laufen. Welches sind die Gleichungen der Tangenten?

562. (476.) Es sollen an den Kreis $x^2+y^2=58$ Tangenten gelegt werden, welche mit der Geraden $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ einen Winkel von 60^0 einschließen. Welches sind die Gleichungen derselben? Welche Gestalt nehmen die Resultate an, wenn die gegebene Gerade die X-Achse ist?

563. (477.) Durch den Punkt $x_1=9$, $y_1>0$ des Kreises

$$x^2+y^2-12x+2y+3=0$$

ist eine Gerade zu ziehen, welche denselben unter einem Winkel von 45^0 schneidet.

564. (478.) An den Kreis $y=\pm\sqrt{x\,(32-x)}$ mögen in den Punkten, welche zu der Abszisse $x_1=19$ gehören, die beiden

Tangenten gelegt sein. Welchen Winkel schließen beide miteinander ein?

565. (479.) An den Kreis $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sind in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Tangenten gelegt. Welches ist die Tangente des von denselben eingeschlossenen Winkels? Welcher Bedingung müssen die Koordinaten der Berührungspunkte genügen, a) wenn die beiden Tangenten parallel laufen, b) wenn sie aufeinander lotrecht stehen?

566. (480.) Die Gleichung eines Kreises ist $x^2 + y^2 = 144$. Die Abszisse des Berührungspunktes einer Tangente sei $x_1 = 8$. Wie lang ist die Subtangente?

567. (481.) Im Punkte (x_1, y_1) sei an den Kreis

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

eine Tangente gelegt. Wie lang ist a) die Tangente? b) die Normale? c) die Subtangente? d) die Subnormale?

Beispiel.

$$x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0, \quad x_1 = 10, \quad y_1 = 9.$$

568. (482.) Von dem Punkte (x_1, y_1) sei an den Kreis

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

eine Tangente gelegt. Wie lang ist dieselbe?

Beispiel.

$$(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 25, \quad x_1 = -11, \quad y_1 = -9.$$

569. (483.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise:

$$y^2 + x^2 - 6y - 2x + 6 = 0,$$
$$y^2 + x^2 - 22y - 20x + 52 = 0.$$

Es sind die Koordinaten eines Punktes zu bestimmen, von dem die Tangenten, an beide Kreise gezogen, gleich $4\sqrt{6}$ sind.

570. (484.) Gegeben sind zwei Kreise

$$x^2 + y^2 + 8x + 12y + 27 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0.$$

Von welchen Punkten lassen sich an dieselben Tangenten ziehen, deren Quadrate die Differenz 210 besitzen?

571. (485.) Von einem um den Koordinatenanfangspunkt beschriebenen Kreise ist die Subnormale eines Punktes $= p$, die Subtangente desselben Punktes $= q$. Welches ist die Gleichung dieses Kreises?

572. (486.) Um den Koordinatenanfangspunkt ist ein Kreis beschrieben, der von der Geraden $y = 3x - 5$ berührt wird. Welches ist die Gleichung desselben?

573. (487.) Auf die Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, deren Berührungspunkt die Koordinaten x_1, y_1 besitzt, sind von den Endpunkten des auf der X-Achse liegenden Durchmessers Lote gefällt. Wie lang ist das zwischen den Fußpunkten liegende Stück der Tangente?

574. (488.) Von dem Punkte (x_1, y_1) sollen an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ zwei Tangenten gezogen werden. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

Beispiel. $x^2 + y^2 = 169$, $x_1 = 16$, $y_1 = 11$.

575. Von dem Punkte $a_1 u + b_1 v + 1 = 0$ sollen an den Kreis

$$(au + bv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0$$

Tangenten gelegt werden. Welches sind die Koordinaten derselben?

576. Die Gerade (u_1, v_1) sei Tangente des Kreises $(au + bv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0$. Welches ist die Gleichung des Berührungspunktes?

577. Es sollen die Koordinaten der (imaginären) Tangenten aufgestellt werden, die sich an den Kreis $(au + bv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0$ von seinem Mittelpunkte aus ziehen lassen, und die Gleichungen der Berührungspunkte. Welche Veränderung erfahren die letzteren, wenn man Lage und Größe des Kreises ändert?

Pol und Polare.

578. (489.) Von dem Punkte (x_1, y_1) sind zwei Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gezogen. Welches ist die Gleichung der Berührungssehne (Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises)?

Beispiele.

a) $x^2 + y^2 = 49$, $x_1 = 13$, $y_1 = 2$.

b) $x^2 + y^2 = 130$, $x_1 = 5$, $y_1 = -\sqrt{105}$.

c) $x^2 + y^2 = 289$, $x_1 = -12$, $y_1 = 4$.

579. (490.) Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = 121$. In welchen Punkten schneidet die Polare des Punktes $(x_1 = 3, y_1 = 2)$ denselben?

580. (491.) Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes $(x_1 = r, y_1 = 0)$ bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$?

581. (492.) Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes $(x_1 = r,\ y_1 = r)$ bezüglich des Kreises $y^2 = x(2r - x)$?

582. (493.) Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2?$$

Beispiele.

a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 81, \quad x_1 = 11, \quad y_1 = 17.$

b) $x^2 + y^2 + 14x + 6y + 22 = 0, \quad x_1 = 8, \quad y_1 = -5.$

c) $x^2 + y^2 - 18x + 2y + 57 = 0, \quad x_1 = -2, \quad y_1 = -7.$

583. (494.) Es soll die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Punktes (a, b) bestimmt werden. Der Punkt (a, b) ist als ein Kreis mit unendlich kleinem Radius zu betrachten.

Beispiel. $x_1 = 11, \quad y_1 = 3, \quad a = 4, \quad b = -2.$

584. (495.) Die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich einer Geraden G ist zu finden. Die Gerade G ist als ein Kreis anzusehen, dessen Radius unendlich groß ist, und dessen Mittelpunkt in der Unendlichkeit liegt.

Anmerkung. Bei der Lösung möge die Kreisgleichung

$$x^2(1 + k) + y^2(1 + k) + (A_1 + kA_2)x + (B_1 + kB_2)y + C_1 + kC_2 = 0$$

benutzt werden, welche für $k = -1$ in die Gleichung einer Geraden übergeht.

Beispiel. $5x - 3y + 7 = 0, \quad x_1 = 8, \quad y_1 = 20.$

585. (496.) Wo liegt die Polare des Punktes (a, b) bezüglich des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$?

586. (497.) Unter welchem Winkel schneidet die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ die Verbindungslinie der Punkte (a, b) und (x_1, y_1)?

587. (498.) Wie läßt sich die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ konstruieren?

588. (499.) Welchen Abstand hat die Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ vom Mittelpunkte desselben?

589. (500.) Die Gerade $y = Mx + n$ werde als Polare bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ betrachtet. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiele. a) $x^2 + y^2 = 96, \quad y = 3x - 24.$

b) $x^2 + y^2 = 46, \quad \frac{x}{7} - \frac{y}{3} = 1.$

c) $x^2 + y^2 = 121, \quad 5x - 4y + 17 = 0.$

590. (501.) Gegeben ist der Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

a) Die Gerade $Lx+My+N=0$ sei eine Polare desselben. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

b) Die Koordinaten einer Geraden seien u_1, v_1; welches ist die Gleichung des zugehörigen Poles in Linienkoordinaten, wenn die Gerade als Polare des Kreises betrachtet wird?

Beispiele.

a) $(x-5)^2+(y+3)^2=49$, $\quad 2x+y-11=0$.

b) $x^2+y^2-14x-4y-5=0$, $\quad 10x+9y-107=0$.

591. (502.) Die Gerade $y=4x-7$ schneidet den Kreis $y^2=10x-x^2$ in zwei Punkten. In jedem der Schnittpunkte sei eine Tangente an den Kreis gelegt. In welchem Punkte schneiden sich die Tangenten?

592. (503.) Die Gerade $y-b=\operatorname{tg}\varphi\,(x-a)$ sei Polare des Kreises $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Wo liegt der Pol?

593. (504.) Die gerade Linie $Lx+My+N=0$ sei Polare bezüglich des Punktes (a, b). Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

594. (505.) Gegeben sind zwei konzentrische Kreise:

$$x^2+y^2=58 \text{ und } x^2+y^2=121.$$

Die Tangente am Punkte $x_1=3$, $y_1<0$ des ersteren sei Polare bezüglich des zweiten. Welches sind die Koordinaten des Poles?

595. (506.) Gegeben ist der Kreis $x^2+y^2=r^2$. Welches sind die Koordinaten des dem Pole (x_1, y_1) konjugierten Poles, der auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes und des Poles liegt? Diese beiden Pole werden kreisverwandte genannt.

596. (507.) Durch den Pol (x_1, y_1) sei eine Parallele zur Polare bezüglich des Kreises $x^2+y^2=r^2$ gezogen. Welches sind die Koordinaten des Poles dieser Parallelen?

597. (508.) Die Geraden des Büschels

$$L_1x+M_1y+N_1+k(L_2x+M_2y+N_2)=0$$

mögen als Polaren des Kreises $x^2+y^2=r^2$ betrachtet werden. Welches ist der geometrische Ort der zugehörigen Pole?

598. (509.) Die Punkte der Geraden $Lx+My+N=0$ mögen als Pole des Kreises $x^2+y^2=r^2$ betrachtet werden. Wie liegen die zugehörigen Polaren?

599. (510.) Gegeben ist der Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Von dem Punkte P ist eine Sekante durch denselben gezogen. Es

ist nachzuweisen, daß die Strecke zwischen P und dem konjugierten Pole durch die Peripherie des Kreises harmonisch geteilt wird.

600. (511.) An einen Kreis seien zwei Tangenten gelegt, welche sich im Punkte P durchschneiden. Durch P sei ferner ein Strahl gezogen und eine Verbindungsgerade nach dem Pol dieses Strahles. Welchen Wert hat das Doppelverhältnis der vier Strahlen?

601. (512.) Vier harmonische Punkte auf einer Geraden g mögen als Pole bezüglich eines gegebenen Kreises betrachtet werden. Welche gegenseitige Lage haben die zugehörigen Polaren?

602. (513.) Gegeben sind zwei Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ und $(x - a_1)^2 + y^2 = r_1^2$. Es sollen auf der Zentrale derselben zwei Punkte bestimmt werden, welche in bezug auf jeden der beiden Kreise kreisverwandte Pole sind.

Bestimmung der Gleichung eines Kreises aus gegebenen Stücken.

603. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der durch den Punkt (x_1, y_1) geht und den Mittelpunkt (a, b) hat.

Beispiele. a) $x_1 = 2, \quad y_1 = 3, \quad a = 0, \quad b = 0.$

b) $x_1 = 0, \quad y_1 = 7, \quad a = 5, \quad b = 0.$

c) $x_1 = 6, \quad y_1 = -8, \quad a = -2, \quad b = 3.$

604. (514.) Die Koordinaten von drei Punkten in der Ebene sind: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Welches ist die Gleichung des Kreises, der durch diese drei Punkte hindurchgeht? Ist die Lage des Kreises durch diese drei Punkte vollständig bestimmt?

Beispiele.

a) $x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 12, \quad x_3 = 5, \quad y_3 = 0.$

b) $x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 7, \quad x_3 = 5, \quad y_3 = 3.$

c) $x_1 = 10, \quad y_1 = 9, \quad x_2 = 4, \quad y_2 = -5, \quad x_3 = 0, \quad y_3 = 5.$

605. (515.) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) hindurchgehen?

Beispiel. $x_1 = 5, \quad y_1 = 3, \quad x_2 = -7, \quad y_2 = -6.$

606. (516.) Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht, und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $Lx + My + N = 0$ liegt.

Beispiel.

$x_1 = 10, \quad y_1 = 9, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 2 - 3\sqrt{6}, \quad 2y - 3x + 17 = 0.$

607. (517.) Durch die beiden Punkte ($x_1 = 10$, $y_1 = 4$) und ($x_2 = 17$, $y_2 = -3$) ist ein Kreis zu legen, welcher den Radius $r = 13$ besitzt.

608. (518.) Welches ist die Gleichung eines Kreises, der durch den Punkt (x_1, y_1) geht, und dessen Mittelpunkt in dem Schnittpunkte der beiden Geraden $y = M_1 x + n_1$, $y = M_2 x + n_2$ liegt?

Beispiel.

$$x_1 = 5,\ y_1 = 6,\ y = 7x - 3,\ 4y - 3x = 13.$$

609. (519.) Wie lautet die Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muß, wenn die vier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) auf der Peripherie eines Kreises liegen sollen?

610. (520.) Es soll durch den Punkt (x_1, y_1) ein Kreis gelegt werden, welcher die Koordinatenachsen berührt. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiel. $x_1 = 3$, $y_1 = 6$.

611. (521.) Es soll die Gleichung eines Kreises bestimmt werden, der die Koordinatenachsen berührt, so daß die Verbindungslinie der Berührungspunkte gleich 10 wird.

612. (522.) Welches ist die Gleichung eines Kreises, der die Ordinatenachse berührt und durch die Punkte ($x_1 = 3$, $y_1 = 0$), ($x_2 = 7$, $y_2 = 0$) hindurchgeht?

613. (523.) Durch den Punkt ($x_1 = -5$, $y_2 = 1$) ist ein Kreis zu legen, der die Ordinatenachse im Punkte ($y_1 = 3$) berührt. Wie lautet die Gleichung desselben?

614. (524.) Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der mit dem Radius r beschrieben, auf der X-Achse ein Stück $= a$, auf der Y-Achse ein Stück $= b$ abschneidet.

Beispiel. $r = 7$, $a = 3$, $b = 2$.

615. Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der durch den Punkt ($x_1 = 2$, $y_1 = 1$) hindurchgeht, den Radius $r = 5$ hat und von der X-Achse die Sehne 8 abschneidet.

616. Welches ist die Gleichung eines Kreises, der durch den Koordinatenanfangspunkt und den Punkt ($x_1 = -2$, $y_1 = 0$) geht und aus der Geraden $3x - 4y + 8 = 0$ die Sehne 2 schneidet?

617. (525.) Um den Punkt (x_1, y_1) ist ein Kreis zu beschreiben, der von der Geraden $Lx + My + N = 0$ berührt wird. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiel.

1) $x_1 = 1,\ y_1 = 2,\quad \frac{x}{5} + \frac{y}{7} + 1 = 0.$

2) $x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ 3x + 2y - 10 = 0.$

618. (526.) Gegeben ist die Gerade $4x + 3y - 70 = 0$. Es soll mit dem Radius $r = 10$ ein Kreis beschrieben werden, der die Gerade in dem Punkte $(x_1 = 10,\ y_1 = 10)$ berührt. Welches ist die Gleichung desselben?

619. (527.) Welches ist die Gleichung des Kreises, der durch den Punkt $(x_1 = 5,\ y_1 = 9)$ geht und die Gerade $4x + 3y + 3 = 0$ im Punkte $(x_2 = -3,\ y_2 = 3)$ berührt?

620. (528.) Mit dem Radius $r = 13$ soll ein Kreis beschrieben werden, der die Gerade $12x + 5y = 144$ berührt und durch den Punkt $(x_1 = 2,\ y_1 = 7 + 2\sqrt{30})$ geht. Welches ist die Gleichung desselben?

621. (529.) Es soll mit dem Radius $r = \sqrt{130}$ ein Kreis beschrieben werden, der die Gerade $9x + 7y - 98 = 0$ berührt, und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $2x - 5y - 65 = 0$ liegt.

622. (530.) Es sollen die Gleichungen der Kreise gesucht werden, welche sich im Punkte $(x_1 = 14,\ y_1 = 9)$ schneiden und von den beiden Parallelen $8x + 11y = 220$ und $8x + 11y = -150$ berührt werden.

623. (531.) Es sind die Gleichungen der Kreise zu bestimmen, welche den Radius r besitzen und von den beiden Geraden $y = M_1 x$ und $y = M_2 x$ berührt werden.

Beispiel. $y = \frac{5}{4}x,\ y = \frac{4}{5}x,\ r = 7.$

624. (532.) Welche Kreise werden von den beiden Geraden $6x + 7y + 9 = 0$ und $7x + 6y + 3 = 0$ berührt, und zwar von der letzteren im Punkte $(x_1 = 3,\ y_1 = -4)$?

625. (533.) Gegeben sind die Gleichungen von drei geraden Linien: $2x - y = 0,\ 7y - 5x + 8 = 0,\ x - 2y - 6 = 0$. Es sollen die Gleichungen der Kreise bestimmt werden, welche von der ersten und dritten Geraden berührt werden, und deren Mittelpunkte in der zweiten Geraden liegen.

626. (534.) Die Seiten eines Dreiecks entsprechen den Gleichungen $17x + 7y = 55,\ 7x + 17y = 161,\ x - y = 5$. Welches ist die Gleichung des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises?

627. Welches sind die Gleichungen der Kreise, die drei Gerade mit den Linienkoordinaten $(u_1, v_1;\ u_2, v_2;\ u_3, v_3)$ zu Tangenten haben?

628. Welches ist die Bedingung dafür, daß vier Gerade mit den Koordinaten $(u_1, v_1;\ u_2, v_2;\ u_3, v_3;\ u_4, v_4)$ Tangenten eines Kreises sind?

629. (535.) Gegeben sind die Gerade $19x + 20y - 8 = 0$ und der Punkt $(x_1 = -17, y_1 = -15)$. Es soll mit dem Radius $r = \sqrt{130}$ ein Kreis konstruiert werden, bezüglich dessen die gegebene Gerade Polare und der gegebene Punkt der zugehörige Pol ist.

630. (536.) Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = 65$ und zwei Punkte $(x_1 = 3, y_1 = 4)$ und $(x_2 = 12, y_2 = -5)$. Es sind die konjugierten kreisverwandten Pole dieser Punkte zu bestimmen. Ferner ist nachzuweisen, daß beide Paare konjugierter Pole auf der Peripherie eines Kreises liegen, und die Gleichung dieses Kreises zu bestimmen.

631. (537.) Durch den Punkt $(x_1 = 11, y_1 = 4)$ ist ein Kreis zu legen, zu dem die beiden Punkte $(x_2 = 15, y_2 = 7)$, $(x_3 = 7{,}5, y_3 = 3{,}5)$ kreisverwandte Pole sind.

632. Welches ist die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt die Koordinaten (a, b) hat und dessen vom Punkte (x_1, y_1) gezogene Tangenten die Länge t haben?

633. (538.) Mit dem Radius $r = \sqrt{52}$ soll ein Kreis beschrieben werden, der durch den Punkt $(x_1 = 9, y_1 = 3)$ geht, und zwar soll derselbe so liegen, daß die vom Punkte $(x_2 = 10, y_2 = 11)$ an ihn gezogene Tangente $t = 13$ ist.

634. (539.) Mit dem Radius $r = 7$ ist ein Kreis zu beschreiben, der von der Geraden $y = x$ berührt wird. Welches ist die Gleichung desselben, wenn die von $(x_1 = 5, y_1 = -3)$ an ihn gezogene Tangente die Länge $t = \sqrt{83 + 42\sqrt{2}}$ besitzen soll?

635. (540.) Gegeben sind die Gleichungen der drei Seiten eines Dreiecks:

$$x_1 \equiv x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0,$$
$$x_2 \equiv x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2 = 0,$$
$$x_3 \equiv x\cos\varphi_3 + y\sin\varphi_3 - p_3 = 0.$$

Welches ist die Gleichung des umschriebenen Kreises in homogenen Koordinaten?

636. (541.) Welches ist die Gleichung des Kreises, der sich dem Fundamentaldreieck einbeschreiben läßt, in homogenen Koordinaten?

637. Von einem Punkte (x_1', x_2', x_3') auf der Peripherie des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises sind Lote auf die drei Seiten des Dreiecks gefällt. Es ist zu zeigen, daß die Fußpunkte dieser Lote in gerader Linie liegen.

Geometrische Örter und Enveloppen.

638. (542.) Welches ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt desjenigen Kreises, der mit dem Radius r beschrieben durch den Punkt (x_1, y_1) geht?

639. (543.) Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes desjenigen Kreises bestimmt werden, der mit dem Radius r_1 beschrieben den Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ berührt.

640. (544.) Gegeben ist der Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Auf welcher Kurve liegen die Halbierungspunkte aller Sehnen desselben, welche die Länge s besitzen?

641. (545.) Zwei Tangenten des Kreises $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, welche den Winkel α einschließen, mögen auf der Peripherie herumgleiten. Welches ist der geometrische Ort ihres Schnittpunktes?

642. (546.) Auf welcher Kurve liegen diejenigen Punkte, von denen die Tangenten an den Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ gezogen gleich t sind?

643. (547.) Die Grundlinie a eines Dreiecks sei konstant. Welche Kurve beschreibt der Scheitel des gegenüberliegenden Winkels, wenn die beiden andern Seiten sich wie m zu n verhalten? Welche Gestalt nimmt das Resultat an, wenn $m=n$ gesetzt wird?

644. (548.) Von einem Dreieck* liege die konstante Seite c fest, die Höhen h_a und h_b mögen sich wie m zu n verhalten. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C?

645. (549.) Die konstante Seite c eines Dreiecks* liege fest. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C, wenn sich die Höhen h_b und h_c wie m zu n verhalten?

646. (550.) Die Grundlinie c eines Dreiecks* sei konstant und liege fest. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C, wenn sich die Sinusse der der Grundlinie c anliegenden Winkel wie 2 zu 1 verhalten?

647. (551.) Von einem Dreieck* liege die konstante Seite c fest, die nach dem Halbierungspunkte von b gerichtete Ecktransversale besitze die Länge t_b. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C?

648. (552.) Die Grundlinie a eines Dreiecks ist konstant, die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich s^2. Welches ist der geometrische Ort der Spitze A?

---

* Lage des Dreiecks ABC wie in Aufgabe 209 usw.

649. (553.) Es ist der geometrische Ort eines Punktes zu bestimmen, der so liegt, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen desselben von n gegebenen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3) \cdots (x_n, y_n)$ gleich einer gegebenen Größe s^2 ist.

650. (554.) Auf welcher Kurve liegen die Spitzen aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie a und denselben Winkel an der Spitze A haben?

651. (555.) Von einem Dreieck liegt die konstante Seite a fest, die Seite b hat eine konstante Länge und dreht sich um den links liegenden Endpunkt von a. Welche Linie beschreibt der Halbierungspunkt der dritten Seite?

652. (556.) Gegeben ist ein Punkt P und eine gerade Linie G. Es ist der geometrische Ort des Punktes zu bestimmen, für den das Quadrat der Entfernung von dem gegebenen Punkte sich zu m^2 wie die Entfernung von der gegebenen Geraden sich zu n verhält.

Beispiel. Die gegebene Gerade sei die X-Achse, die Koordinaten des Punktes seien $x_1 = 0$, $y_1 = 7$, ferner sei $m = 2$, $n = 3$.

653. (557.) Gegeben ist der Punkt (x_1, y_1) und die gerade Linie $Lx + My + N = 0$. Es ist der geometrische Ort desjenigen Punktes zu suchen, dessen Entfernung von dem gegebenen Punkte mittlere Proportionale zwischen der Entfernung von der gegebenen Geraden und der Strecke s ist.

Beispiel. $3x + 4y + 6 = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $s = 5$.

654. (558.) Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels bewege sich eine Gerade von der Länge s. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes der Strecke s?

655. (559.) Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $y^2 = 2rx - x^2$. Von dem Koordinatenanfangspunkte sind Sehnen in den Kreis gezogen, und jede derselben ist im Verhältnis m zu n geteilt. Welches ist der geometrische Ort der Teilpunkte?

Beispiele. a) $y^2 = 20x - x^2$, $m = 1$, $n = 1$.
b) $y^2 = 26x - x^2$, $m = 3$, $n = 7$.

656. (560.) In den Kreis $y^2 = 2rx - x^2$ seien vom Koordinatenanfangspunkte beliebig viele Sehnen gezogen und jede derselben um sich selbst verlängert. In welcher Kurve liegen die Endpunkte?

657. (561.) Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $y^2 + x^2 = r^2$. Auf jedem Radius desselben ist vom Mittelpunkte aus die Ordinate seines Endpunktes abgetragen. Auf welcher Kurve liegen die Endpunkte der Abschnitte?

658. (562.) Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $x^2+y^2=r^2$. Auf jedem Radius desselben ist vom Mittelpunkte aus die Abszisse seines Endpunktes abgetragen. Welches ist die Kurve, auf der die Endpunkte der Abschnitte liegen?

659. (563.) Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt (x_1, y_1) gehen und den Kreis $x^2+y^2=r^2$ rechtwinklig durchschneiden?

660. (564.) Gegeben ist die Gleichung eines Kreises

$$y^2+\left(x-\frac{r}{2}\right)^2=r^2.$$

Durch den Koordinatenanfangspunkt sind Kreise zu legen, so daß die Peripherie eines jeden durch den gegebenen Kreis halbiert wird. Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller dieser Kreise?

661. (565.) Es soll der geometrische Ort für denjenigen Punkt gesucht werden, von dem aus die beiden Kreise $x^2+y^2=r^2$ und $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1{}^2$ unter gleichen Winkeln gesehen werden.

662. (566.) Es sind die Koordinaten eines Punktes zu bestimmen, von dem aus die drei Kreise $x^2+y^2=16$, $x^2+(y-5)^2=9$, $(x-7)^2+(y-1)^2=25$ unter gleichen Winkeln gesehen werden.

663. (567.) Auf einer Geraden liegen drei Punkte L, M und N. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn $LPM=MPN$ sein soll?

664. An einen Kreis, der den Koordinatenanfangspunkt zum Mittelpunkt hat, sind von zwei Punkten der X-Achse ($x_1, 0$ und $x_2, 0$) Tangenten gelegt. Welches ist der geometrische Ort für die Schnittpunkte dieser Tangenten, wenn der Radius des Kreises veränderlich ist?

665. (568.) Auf welcher Linie liegen die Schwerpunkte aller Dreiecke, welche über der auf der X-Achse festliegenden Sehne s dem Kreise $y^2+x^2-2y\sqrt{r^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2}=\left(\frac{s}{2}\right)^2$ einbeschrieben werden können?

666. (569.) Über der Grundlinie c sind beliebig viele Dreiecke* konstruiert, welche alle in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen. Auf welcher Kurve liegen die Höhenpunkte dieser Dreiecke?

667. (570.) Die Seite c eines Dreiecks* und der gegenüberliegende Winkel C sind konstant, die übrigen Stücke veränderlich.

* Lage des Dreiecks ABC wie in Aufgabe 209 usw.

Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte des einbeschriebenen und des der Seite AB angeschriebenen Kreises?

668. (571.) Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die gerade Linie $Lx + My + N = 0$. Der Pol P des Kreises möge auf der Geraden fortrücken. Welche Linie beschreibt dann der kreisverwandte Pol?

669. (572.) Gegeben sind zwei Kreise K und K_1. Der Punkt P, welcher als Pol bezüglich des Kreises K betrachtet wird, gleite auf der Peripherie des Kreises K_1 fort. Welche Linie beschreibt der kreisverwandte Pol? Die Zentrale beider Kreise möge Abszissenachse sein, der Mittelpunkt des Kreises K Koordinatenanfangspunkt. Die Gleichung des Kreises K wird also $x^2 + y^2 = r^2$, die des Kreises K_1 $(x - a_1)^2 + y^2 = {r_1}^2$ sein.

670. (573.) Wie gestaltet sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn die Peripherie des Kreises K_1 durch den Mittelpunkt des Kreises K geht?

671. (574.) Eine Gerade möge sich so bewegen, daß sie von einem Punkte, dessen Koordinaten a, b sind, stets denselben Abstand r behält. Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen der Geraden ein?

672. (575.) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels sei vom Scheitelpunkt aus eine Strecke gleich a abgeschnitten, ferner schneide eine Gerade g auf dem einen Schenkel das Stück p, auf dem andern das Stück q ab. Die Strecke von g, welche zwischen beiden Schenkeln liegt, sei gleich $p + q - 2a$. Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen von g ein?

673. (576.) Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen der Geraden $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ ein, wenn p und φ der Relation $\frac{p - a}{\cos(\varphi - \alpha)} = b$ genügen sollen? a, b, α sind konstant.

674. (577.) Die Punkte der Peripherie des Kreises $x^2 + y^2 = {r_1}^2$ mögen als Pole bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = {r_2}^2$ betrachtet werden. Welche Kurve hüllt die zugehörigen Polaren ein?

675. (578.) Der Abschnitt, welchen die Gerade $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ auf der X-Achse bildet, werde mit q bezeichnet. Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen der Geraden ein, wenn $p : a = q : q - a$ ist? a sei konstant.

676. (579.) Der Abschnitt q, welchen die Gerade $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ auf der X-Achse bildet, möge der Bedingungsgleichung

$$2a = q\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)$$

genügen. Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen der Geraden ein?

677. Der Scheitel des konstanten Winkels α rücke auf der Peripherie des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$ entlang, während der eine Schenkel durch den Koordinatenanfangspunkt geht. Welches ist die Enveloppe des andern Schenkels?

678. In den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ sind Sehnen der Länge s eingetragen. Welches ist die Enveloppe dieser Sehnen?

679. Gegeben sind die beiden festen Punkte $-\frac{a}{2}u + 1 = 0$ und $+\frac{a}{2}u + 1 = 0$. Welches ist die Enveloppe derjenigen Geraden, für die die Summe der Abstände von den beiden festen Punkten $= s$ ist?

680. Von einem Dreieck ABC* sind der Umfang $2s$ und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich. Welches ist die Enveloppe der Seite BC?

681. Von einem Dreieck ABC* sind die Seite $AC = b$ und der Winkel C konstant. Welches ist die Enveloppe der Seite BC?

682. Von einem Dreieck ABC* sind $AC = b$ und $\sphericalangle C$ konstant. Welches sind die Enveloppen der Halbierungslinien des Innen- und des Außenwinkels bei C?

Kreise, welche sich schneiden oder berühren.

683. (580.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise:

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

a) Welches Gebilde entspricht der Gleichung $K_1 + kK_2 = 0$, wenn man k alle möglichen reellen Werte erteilt?

b) Welches ist die Gleichung des Mittelpunktes des Kreises $K_1 + fK_2 = 0$ in Linienkoordinaten, wenn die Gleichungen der Mittelpunkte der Kreise K_1 und K_2 $M_1 = 0$ und $M_2 = 0$ sind?

684. (581.) Welches ist die Gleichung eines Kreises, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ und durch den Punkt (x_1, y_1) geht?

---

* Lage wie in Aufgabe 209 usw.

Beispiele. a) $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0,$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y + 20 = 0,$
$x_1 = 0, \quad y_1 = 0.$
b) $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 14y + 37 = 0,$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 16x - 26y + 220 = 0,$
$x_1 = -1, \quad y_1 = +2.$

685. (582.) Gegeben sind zwei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$. Es soll mit dem Radius r ein Kreis beschrieben werden, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise hindurchgeht. Welches ist die Gleichung desselben?

Beispiel. $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y - 26 = 0,$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0,$
$r = 5.$

686. (583.) Gegeben sind die beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ und die Gerade $Lx + My + N = 0$. Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise geht, und dessen Mittelpunkt auf der gegebenen Geraden liegt.

Beispiel. $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0,$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0,$
$5x - 3y - 7 = 0.$

687. (584.) Durch die Schnittpunkte der beiden Kreise

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 14y - 68 = 0,$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 22y + 30 = 0$$

ist ein Kreis zu legen, der von der X-Achse berührt wird.

688. (585.) Die gegenseitige Lage der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$(x - a)^2 + y^2 = r_1^2$$

ist aus den Konstanten r, r_1 und a zu bestimmen.

689. (586.) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{und} \quad (x - 5)^2 + y^2 = 9?$$

690. Welches ist die Bedingung dafür, daß die Kreise $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ und $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ sich rechtwinklig durchschneiden?

691. Es ist die Gleichung eines Kreises aufzustellen, der die drei gegebenen Kreise

$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

rechtwinklig durchschneidet.

692. (587.) Welcher Bedingungsgleichung müssen die Konstanten der Gleichungen

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

genügen, wenn die diesen Relationen entsprechenden Kreise sich einschließend oder ausschließend berühren sollen?

693. (588.) Es soll die Gleichung eines Kreises bestimmt werden, der die beiden Kreise

$$(x - 11)^2 + (y - 5)^2 = 49,$$
$$(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

in ihrem Berührungspunkte berührt und durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

694. (589.) Welcher Kreis berührt die Kreise

$$(x - 7)^2 + (y - 13)^2 = 9,$$
$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 49$$

in ihrem Berührungspunkte und wird selbst von der X-Achse berührt?

695. (590.) Gegeben sind zwei sich berührende Kreise:

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 25,$$
$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 64.$$

Es soll die Gleichung eines Kreises bestimmt werden, der beide Kreise in ihrem Berührungspunkte berührt, und dessen Mittelpunkt auf der Y-Achse liegt.

696. (591.) Gegeben sind zwei sich berührende Kreise:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0, \quad x^2 + y^2 + 6x = 0.$$

Es soll die Gleichung eines Kreises bestimmt werden, der beide Kreise in ihrem Berührungspunkte und außerdem den Kreis

$$(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 1$$

einschließend oder ausschließend berührt.

697. (592.) Gegeben sind die beiden Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ und $x^2 + y^2 + rx = 0$. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, der von jedem dieser beiden Kreise und von der X-Achse berührt wird?

698. (593.) Gegeben sind drei Kreise:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 + rx = 0, \quad x^2 + y^2 - rx = 0.$$

Es soll die Gleichung eines Kreises bestimmt werden, welchen der erste Kreis einschließend, die beiden andern Kreise ausschließend berühren.

699. Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der die X-Achse im Punkte $(x_1, 0)$ und außerdem den Kreis $x^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ berührt.

Radikalachse und Radikalzentrum.

700. (594.) Welches ist die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne (Radikalachse) der beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$?

Beispiele. a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$,
$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

b) $(x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 9$,
$(x - 7)^2 + (y - 11)^2 = 16$.

701. (595.) Wie groß ist der Winkel, den die Radikalachse zweier Kreise mit der Zentrale derselben einschließt?

702. (596.) Wo liegt die Radikalachse zweier konzentrischen Kreise?

703. (597.) Welches ist die Gleichung der Radikalachse des Kreises

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

und des Punktes (a_2, b_2)? Welchen Winkel schließt die Radikalachse mit der Polare des Punktes (a_2, b_2) bezüglich des Kreises $K_1 = 0$ ein?

Beispiel. $x^2 + y^2 + 5x + 12y - 7 = 0$,
$a_2 = 17, \quad b_2 = 11.$

704. (598.) Welches ist die Gleichung der Radikalachse der beiden Punkte $(a_1 = 3, b_1 = 5)$ und $(a_2 = -4, b_2 = 7)$?

705. (599.) Welches ist die Gleichung der Radikalachse des Kreises $K = 0$ und der geraden Linie $L = 0$?

706. (600.) Die Radikalachse des Punktes P und einer Geraden L ist zu bestimmen.

707. (601.) Es soll der geometrische Ort eines Punktes gefunden werden, von dem die Tangenten an die beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ gezogen sich wie m zu n verhalten.

708. (602.) Auf welcher Linie befinden sich die Punkte, von denen sich gleiche Tangenten an die beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ ziehen lassen? In welcher Beziehung steht der geometrische Ort des Punktes zur Radikalachse beider Kreise?

709. (603.) Welches ist die geometrische Bedeutung der Größe k in der Gleichung $K_1 - kK_2 = 0$?

710. (604.) In welcher Beziehung steht die Radikalachse der beiden Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ zu den gemeinschaftlichen Tangenten derselben?

711. (605.) Es ist zu zeigen, daß sich die Radikalachsen von drei Kreisen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ in einem Punkte (dem Radikalzentrum) durchschneiden.

712. (606.) Welches sind die Koordinaten des Radikalzentrums der drei Kreise

$$(x-7)^2 + (y-9)^2 = 36,$$
$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16,$$
$$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 9?$$

713. (607.) Von welchem Punkte lassen sich gleiche Tangenten an die drei Kreise

$$x^2 + y^2 = 4,$$
$$x^2 + y^2 - 14x - 72 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 16y + 37 = 0$$

ziehen? Wie lang ist jede derselben?

714. (608.) Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, welcher die drei gegebenen Kreise

$$x^2 + y^2 - 14x - 18y + 94 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 8x + 10y + 32 = 0$$

rechtwinklig durchschneidet.

715. (609.) Gegeben sind zwei Kreise

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 14x + 12y + 81 = 0$$

und der Punkt ($a_1 = 3$, $b_1 = -7$). Welches ist das Radikalzentrum dieser drei Gebilde?

716. (610.) Es soll die Gleichung eines Kreises gefunden werden, der durch den Punkt ($a_1 = -5$, $b_1 = -4$) geht und die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

rechtwinklig durchschneidet.

717. (611.) Es ist das Radikalzentrum des Kreises

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

und der beiden Punkte ($a_1 = 3$, $b_1 = -4$), ($a_2 = -5$, $b_2 = -5$) zu bestimmen.

718. (612.) Durch die beiden Punkte ($a_1 = -4$, $b_1 = 3$) und ($a_2 = -2$, $b_2 = -3$) ist ein Kreis zu legen, der den Kreis

$$x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$$

rechtwinklig durchschneidet. Welches ist die Gleichung desselben?

719. (613.) Wie läßt sich durch eine einfache Konstruktion die Radikalachse zweier Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ finden, wenn sich dieselben weder schneiden noch berühren?

Das Kreisbüschel.

Erklärung. Alle Kreise, welche sich in zwei festen Punkten schneiden, bilden ein Kreisbüschel.

720. (614.) Welches ist die Gleichung eines Kreisbüschels, wenn die gemeinschaftliche Zentrale aller Kreise mit der X-Achse, die Radikalachse mit der Y-Achse zusammenfällt?

721. (615.) Welche Werte muß man der Konstanten k in der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$$

erteilen, um die Gleichungen der Punktkreise des Büschels zu erhalten?

722. (616.) Unter welcher Bedingung kann ein Kreisbüschel überhaupt Punktkreise besitzen?

723. (617.) Es soll die Gleichung eines Kreisbüschels bestimmt werden, wenn die Schnittpunkte mit der Radikalachse gegeben sind.

724. (618.) Gegeben sind die Gleichungen der beiden Punktkreise des Büschels $(x \mp f)^2 + y^2 = 0$. Welches ist die Gleichung des Büschels?

725. (619.) Gegeben ist die Gleichung eines Kreisbüschels

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0.$$

Es ist nachzuweisen, daß der mit der X-Achse zusammenfallende Durchmesser jedes Kreises durch die beiden Punktkreise harmonisch geteilt wird.

726. (620.) Gegeben ist ein Kreisbüschel, welches der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$$

entspricht. Es soll derjenige Kreis desselben bestimmt werden, dessen von dem Punkte (x_1, y_1) aus gezogene Tangente die Größe t hat.

727. (621.) Gegeben ist ein Kreisbüschel, welches der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$$

entspricht. Von dem Punkte $P(0, y_1)$ seien Tangenten an alle Kreise des Büschels gezogen. Auf welcher Kurve liegen die Berührungspunkte derselben?

728. (622.) Wie läßt sich nachweisen, daß diejenigen Kreise, welche alle Kreise eines Büschels rechtwinklig durchschneiden, ebenfalls ein Kreisbüschel (das konjugierte Kreisbüschel) bilden? Welches ist die Gleichung des konjugierten Büschels, wenn die des ursprünglichen Büschels $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$ ist?

729. (623.) Die Gleichung eines Kreisbüschels ist

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0.$$

Wie liegen die Punktkreise dieses Büschels zu den Kreisen des konjugierten Büschels? Welches ist die Radikalachse des konjugierten Büschels?

730. (624.) Gegeben sind die Gleichungen von zwei konjugierten Kreisbüscheln:

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2k_1 y - f^2 = 0.$$

Wie liegen die Polaren der Schnittpunkte des zweiten Büschels bezüglich der Kreise des ersten?

731. (625.) Gegeben ist das Kreisbüschel

$$x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$$

und der Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Es soll derjenige Kreis des Büschels bestimmt werden, der den letzteren Kreis rechtwinklig durchschneidet.

732. (626.) Gegeben ist das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$ und der Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Es ist zu zeigen,

daß die Radikalachsen des letzteren und jedes Kreises des Büschels ein Strahlenbüschel bilden.

733. (627.) Wie liegen die Polaren eines Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Kreise des Büschels $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$?

734. (628.) Gegeben ist das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2kx + f^2 = 0$ und der Punkt (x_1, y_1). a) Welches sind die Koordinaten des harmonischen Poles zu (x_1, y_1) bezüglich des Büschels? b) In welchem Verhältnis wird der Abstand dieser beiden Punkte durch die Radikalachse geteilt? c) Welcher Satz gilt von den Punkten, in denen die Verbindungslinie der beiden harmonischen Pole von den Kreisen des Büschels geschnitten wird?

735. (629.) Beschreibt man über den Abständen harmonischer Pole bezüglich eines Kreisbüschels Kreise, so bilden diese ebenfalls ein Büschel. Welches ist die Gleichung desselben? In welchen Punkten schneiden sich alle Kreise des letzteren Büschels?

736. (630.) Gegeben sind zwei Kreise

$$K_1 \equiv y^2 + x^2 - 2k_1x - f^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv y^2 + x^2 + 2k_2x - f^2 = 0.$$

Es soll ein Kreis bestimmt werden, der beide schneidet, so daß die gemeinschaftlichen Sehnen Durchmesser der gegebenen Kreise sind.

737. (631.) Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise K_1, K_2 so schneiden, daß die gemeinschaftlichen Sehnen Durchmesser der letzteren sind? (Sekundäre Radikalachse.)

738. (632.) Es ist zu zeigen, daß die Kreise, welche die Peripherien von K_1 und K_2 halbieren, ein Büschel bilden. Welches ist die Radikalachse desselben?

739. (633.) Wie läßt sich nachweisen, daß die sekundären Radikalachsen der drei Kreise

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2,$$
$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = r_3^2$$

durch einen Punkt gehen?

740. (634.) Gegeben sind drei Kreise

$$y^2 + x^2 - 2x - 9 = 0,$$
$$y^2 + x^2 + 3x - 9 = 0,$$
$$y^2 + x^2 - 6y - 10x + 18 = 0.$$

Es soll ein Kreis gefunden werden, der die gegebenen Kreise so schneidet, daß die gemeinschaftlichen Sehnen Durchmesser der letzteren sind.

741. Gegeben sind die Gleichungen von drei Kreisen

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad K_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \quad K_3 \equiv x^2 + y^2 + A_3 x + B_3 y + C_3 = 0.$$

Welches Gebilde entspricht der Gleichung $K_1 + fK_2 + hK_3 = 0$, wenn f und h variable Parameter sind?

742. Welcher Kreis schneidet die Kreise des Netzes $K_1 + fK_2 + hK_3 = 0$ rechtwinklig?

Gemeinschaftliche Tangenten zweier Kreise; Ähnlichkeitspunkte, Ähnlichkeitsachsen.

743. (635.) Gegeben sind die beiden Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0.$$

Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten derselben?

Beispiele.

a) $K_1 \equiv (x - 11)^2 + (y - 9)^2 - 16 = 0,$
$K_2 \equiv (x - 3)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0.$

b) $K_1 \equiv (x - 5)^2 + (y - 3)^2 - 16 = 0,$
$K_2 \equiv (x - 4)^2 + y^2 - 9 = 0.$

744. (636.) Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0.$$

Welches sind die Koordinaten des äußeren Ähnlichkeitspunktes derselben? Welches die Koordinaten des inneren Ähnlichkeitspunktes?

Beispiel.

$$K_1 \equiv (x - 11)^2 + (y - 3)^2 - 36 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - 1)^2 + (y + 7)^2 - 25 = 0.$$

745. (637.) Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise K_1 und K_2, wenn die Radien derselben gleich sind?

746. (638.) Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise K_1 und K_2, wenn dieselben sich von innen oder von außen berühren?

747. (639.) Gegeben ist der Kreis $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = {r_1}^2$ und der Punkt (a_2, b_2). Welches sind die Koordinaten der Ähnlichkeitspunkte beider?

748. (640.) Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte der beiden Punkte (a_1, b_1) und (a_2, b_2)?

749. (641.) Gegeben sind der Kreis $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = {r_1}^2$ und die gerade Linie $Ax + By + C = 0$. Wo liegen die Ähnlichkeitspunkte derselben?

750. (642.) Die Gleichungen der Mittelpunkte zweier Kreise sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Wie wird der Abstand der Mittelpunkte durch die Ähnlichkeitspunkte der Kreise geteilt?

751. (643.) Gegeben sind zwei Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - {r_1}^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - {r_2}^2 = 0.$$

Durch die Punkte, in denen dieselben von den Polaren des äußeren Ähnlichkeitspunktes geschnitten werden, soll ein Kreis gelegt werden. Welches ist die Gleichung desselben? In welchem Verhältnis wird die Zentrale der beiden Kreise K_1 und K_2 durch den Mittelpunkt dieses Kreises geteilt?

752. (644.) Gegeben sind drei Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - {r_1}^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - {r_2}^2 = 0,$$
$$K_3 \equiv (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 - {r_3}^2 = 0.$$

Es ist zu zeigen, daß die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte derselben auf einer geraden Linie liegen. Welches ist die Gleichung dieser Geraden (Ähnlichkeitsachse)?

753. (645.) Gegeben sind drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$. Welche Lage haben die inneren Ähnlichkeitspunkte derselben zu den äußeren?

754. (646.) Gegeben sind drei Kreise

$$x^2 + y^2 = 16,$$
$$(x - 5)^2 + y^2 = 81,$$
$$(x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 4.$$

Welches sind die Gleichungen der vier Ähnlichkeitsachsen derselben?

755. (647.) Zwei Kreise K_1 und K_2 werden von dem Kreise K_3 in den Punkten P_1 und P_2 berührt. In welchem Punkte schneidet die Gerade P_1P_2 die Zentrale der beiden Kreise K_1 und K_2?

756. (648.) Gegeben sind zwei Kreise K_1 und K_2. Es soll ein dritter Kreis K_3 konstruiert werden, der beide Kreise berührt und zwar den zweiten im Punkte P.

757. (649.) Durch die beiden Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

ist ein Büschel bestimmt. Es sollen diejenigen Kreise des Büschels $K_1 + kK_2 = 0$ gefunden werden, deren Mittelpunkte die Ähnlichkeitspunkte der Kreise K_1 und K_2 sind.

758. (650.) Gegeben ist ein Kreis

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

und die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Welches ist die Gleichung des Kreises, der mit dem Kreise K_1 die gegebenen Punkte zu Ähnlichkeitspunkten hat?

Beispiel. $K_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 4)^2 - 121 = 0,$

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 20, \quad x_2 = 9, \quad y_2 = 36.$$

759. (651.) Gegeben sind der Kreis $K_1 \equiv x^2 + y^2 - r_1^2 = 0$, der Punkt $P\ (a, b)$ und der Punkt $P_1\ (x_1, 0)$. Es soll ein Kreis bestimmt werden, der durch P geht, so daß P_1 äußerer Ähnlichkeitspunkt des gegebenen und gesuchten Kreises wird.

760. (652.) Gegeben ist der Kreis $K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$ und der Punkt $P\ (a, b)$, in dem sich zwei Tangenten t_1 und t_2 des Kreises schneiden. Es soll die Gleichung eines Kreises gefunden werden, der von dem Kreise K_1 und den beiden Tangenten t_1 und t_2 berührt wird.

761. (653.) Gegeben sind zwei Kreise

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + y^2 - r_2^2 = 0.$$

Über dem Abstande der Ähnlichkeitspunkte dieser beiden Kreise als Durchmesser sei ein Kreis konstruiert. In welchem Verhältnis stehen die Winkel, unter denen von den einzelnen Punkten der Peripherie dieses Kreises die gegebenen Kreise erscheinen?

762. (654.) Gegeben sind die beiden Kreise

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$
$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0.$$

Über dem Abstande der Ähnlichkeitspunkte dieser Kreise als Durchmesser sei ein Kreis beschrieben. Wie liegen die Radikalachsen dieser drei Kreise?

763. (655.) Wie liegen die Polaren der Ähnlichkeitspunkte bezüglich der Kreise K_1 und K_2 zu der Radikalachse derselben?

764. (656.) Gegeben ist der Kreis K_1 und drei Punkte, welche auf einer Geraden liegen, P_1, P_2, P_3. Es sollen zwei Kreise K_2 und K_3 gesucht werden, so daß die gegebenen Punkte äußere Ähnlichkeitspunkte dieser drei Kreise werden, und zwar P_1 von K_1 und K_2, P_2 von K_2 und K_3, P_3 von K_3 und K_1.

$$K_1 \equiv (x-3)^2 + (y-2)^2 - 25 = 0.$$

$$P_1\left(x_1 = -2,\ y_1 = -\tfrac{1}{2}\right).\quad P_2\,(x_2 = -8,\ y_2 = -6).$$

$$P_3\,(x_3 = -32,\ y_3 = -28).$$

Das Taktionsproblem.

Das Problem des Apollonius fordert die Bestimmung eines Kreises, der drei gegebene Kreise berührt. Da nun der Punkt und die Gerade ebenfalls als Kreise anzusehen sind, nämlich der Punkt als ein Kreis mit unendlich kleinem Radius, die Gerade als ein Kreis mit unendlich großem Radius und unendlich fernem Mittelpunkte, so besteht das Problem aus zehn einzelnen Aufgaben. Zwei dieser Aufgaben sind bereits in 604 und 627 gelöst. Die übrigen acht mögen hier Platz finden. Die Lage des Koordinatensystems ist für die folgenden Aufgaben so gewählt, daß die Lösungen sich in möglichst einfacher Weise durchführen lassen.

765. (657.) Es soll ein Kreis bestimmt werden, der durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht und von der Geraden G berührt wird.

Beispiel. $P_1\,(x_1 = 0,\ y_1 = 2).\quad P_2\,(x_2 = 0,\ y_2 = -2).$

$$G \equiv y - 5x - 7 = 0.$$

766. (658.) Durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ist ein Kreis zu legen, welcher den gegebenen Kreis K_1 berührt.

Beispiel. $P_1\,(x_1 = 0,\ y_1 = 3).\quad P_2\,(x_2 = 0,\ y_2 = -3).$

$$K_1 \equiv (x-4)^2 + (y+3)^2 - 4 = 0.$$

767. (659.) Welches ist die Gleichung eines Kreises, der durch den Punkt P_1 geht und von den beiden Geraden G_1 und G_2 berührt wird?

Beispiel. $P_1\,(x_1 = 3,\ y_1 = 8).$

$$G_1 \equiv y = 0.\quad G_2 \equiv 12y - 35x = 0.$$

768. (660.) Gegeben sind der Kreis K_1, die gerade Linie G_1 und der Punkt P_1. Es soll ein Kreis bestimmt werden, der durch

den Punkt P_1 geht und von der Geraden G_1 und dem Kreise K_1 berührt wird.

Beispiel. $K_1 \equiv x^2 + (y-6)^2 - 9 = 0.$

$G_1 \equiv y = 0. \quad P_1(x_1 = 5, \quad y_1 = 2).$

769. (661.) Durch den Punkt P_1 soll ein Kreis gelegt werden, welcher die beiden Kreise K_1 und K_2 berührt.

$P_1(x_1 = 0, \quad y_1 = 0). \quad K_1 \equiv (y-b_1)^2 + x^2 - r_1^2 = 0.$

$K_2 \equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0.$

770. (662.) Es ist die Gleichung eines Kreises zu bestimmen, der die beiden Geraden G_1 und G_2 und den Kreis K_1 berührt.

$G_1 \equiv y = 0. \quad G_2 \equiv x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0.$

$K_1 \equiv x^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0.$

771. (663.) Gegeben sind die Gerade G_1 und die beiden Kreise K_1 und K_2. Es soll ein Kreis bestimmt werden, der die Gerade und die beiden Kreise berührt.

$G_1 \equiv y = 0. \quad K_1 \equiv x^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0.$

$K_2 \equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0.$

Beispiel. $G_1 \equiv y = 0. \quad K_1 \equiv x^2 + (y-3)^2 - 4 = 0.$

$K_2 \equiv (x-5)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0.$

772. (664.) Es soll ein Kreis gefunden werden, der die drei Kreise

$K_1 \equiv (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0,$

$K_2 \equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0,$

$K_3 \equiv (x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 - r_3^2 = 0$

berührt.

Beispiel.

$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0.$

$K_2 \equiv x^2 + (y-5)^2 - 9 = 0.$

$K_3 \equiv (x-3)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0.$

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

QA
555
H64
1904
Heft 1a

Hochheim, Adolf
Aufgaben aus der
analytischen Geometrie der
Ebene

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY